Материалы для проведения заключительного этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Нижний Новгород, 19–25 апреля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, Н. Ю. Власова, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

А также: М. А. Дидин, И. А. Ефремов, К. А. Кноп, П. Ю. Козлов, Т. С. Коротченко, А. Д. Терёшин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, А. И. Храбров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Петя и Вася знают лишь натуральные числа, не превосходящие 10^9-4000. Петя считает хорошими числа, представимые в виде $abc+ab+ac+bc$, где a, b и c — натуральные числа, **не меньшие** 100. Вася считает хорошими числа, представимые в виде $xyz-x-y-z$, где x, y и z — натуральные числа, **бо́льшие** 100. Для кого из них хороших чисел больше? (*И. Богданов*)

Ответ. Для Васи.

Решение. Если число $k=abc+ab+ac+bc\leqslant 10^9-4000$ хорошее для Пети, то (также натуральное) число

$$k-2=(a+1)(b+1)(c+1)-(a+1)-(b+1)-(c+1)$$

является хорошим для Васи. Значит, если для Пети есть p хороших чисел, то мы предъявили p различных чисел, хороших для Васи, и все они строго меньше, чем 10^9-4000. Но число

$$10^9-4000=(1000-1)\cdot 1000\cdot(1000+1)-(1000-1)-1000-(1000+1)$$

также является хорошим для Васи; поэтому для Васи есть хотя бы $p+1$ хорошее число.

9.2. У натурального числа ровно 50 делителей. Может ли оказаться, что никакая разность двух различных его делителей не делится на 100? (*Методкомиссия по мотивам задачи А. Чиронова*)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, что такое число n существует. Условие равносильно тому, что все числа, образованные последними двумя цифрами делителей, различны (мы считаем, что к однозначным числам спереди приписаны нули). Назовём такую пару последних цифр *хвостом* числа. Заметим, что хвост числа имеет те же остатки от деления на 4 и на 5, что и исходное число.

Предположим, что n делится на 5. Тогда для любого его делителя d, не кратного 5, существует и делитель $5d$, кратный 5. При этом для разных делителей d мы получаем разные делители $5d$; поэтому количество кратных 5 делителей не меньше половины, то есть не меньше 25. Но такие делители имеют хвосты, оканчивающиеся либо на 0, либо на 5. Таких возможных хвостов не больше 20, поэтому два из них совпадают. Это противоречие показывает, что n не делится на 5, и хвосты его делителей не могут оканчиваться на 0 или 5.

Если число n нечётно, то все его делители также нечётны. Однако существует всего 50 возможных нечётных хвостов, и 10 из них оканчиваются на 5, то есть не могут появиться. Поэтому и в этом случае найдутся два одинаковых хвоста.

Если число n делится на 2, но не на 4, то все его делители разбиваются на пары $(d, 2d)$, где d — нечётный делитель n. При этом все числа вида $2d$ имеют хвосты, не делящиеся на 4, а таких хвостов (не делящихся на 5) всего 20. Значит, два из этих хвостов одинаковы.

Наконец, пусть наибольшая степень двойки, на которую делится n, равна 2^r, где $r \geqslant 2$. Тогда, если d — нечётный делитель n, то числа d, $2d$, $2^2d, \ldots, 2^rd$ также будут делителями n, и этим исчерпываются все делители n. Поэтому общее число делителей n будет кратно $r+1$. Таким образом, 50 делится на $r+1$ и, значит, $r \geqslant 4$.

Тогда n имеет $\frac{50}{r+1} \leqslant 10$ нечётных делителей и столько же делителей, которые чётны и не делятся на четыре. Стало быть, оставшиеся делители (которых не меньше 30) кратны 4 и, значит, их хвосты также кратны четырём. Но таких хвостов возможно лишь 20, поэтому опять два из них совпадут.

9.3. Двум мальчикам выдали по мешку картошки, в каждом мешке по 150 клубней. Ребята по очереди перекладывают картошку, каждый своим очередным ходом перекладывает ненулевое количество клубней из своего мешка в чужой. При этом они должны соблюдать *условие новой возможности*: на каждом ходе мальчик должен переложить больше клубней, чем у него было в мешке перед любым из его предыдущих ходов (если такие ходы были). Так, первым своим ходом мальчик может переложить любое ненулевое количество, а своим пятым ходом мальчик может переложить 200 клубней, если перед его первым, вторым, третьим и четвёртым ходами количества клубней в его мешке были меньше 200. Какое максимальное суммарное количество ходов могут совершить ребята? (*Е. Молчанов*)

Ответ. 19.

Решение. Пусть в процессе было N ходов.

Рассмотрим k-й ход. Обозначим через a_k количество клубней у мальчика, делавшего этот ход, сразу после хода. Тогда у другого мальчика после хода $300 - a_k$ клубней. Также обозначим через $a_0 = 150 = 300 - a_0$ количество клубней у (любого) мальчика перед первым ходом.

В этих обозначениях, перед k-м ходом у мальчика, делавшего его, было $300 - a_{k-1}$ клубней, а после него — a_k клубней. Значит, на этом ходу он передавал $300 - a_{k-1} - a_k$ клубней. Если $k \geqslant 3$, то это количество должно быть больше, чем количество клубней у этого мальчика перед его предыдущим ($(k-2)$-м) ходом, то есть не меньше, чем $300 - a_{k-3}$. Итак, $300 - a_{k-1} - a_k > 300 - a_{k-3}$, или $a_{k-3} > a_{k-1} + a_k$. Поскольку все числа a_i целые, получаем, что $a_{k-3} \geqslant a_{k-1} + a_k + 1$ при всех $k = 3$,4, ..., N.

Теперь можно получить оценки на числа a_i, действуя «с конца». Определим числа b_0, b_1, b_2, ... условиями $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ и $b_{k+3} = b_{k+1} + b_k + 1$. Докажем, что $a_{N-k} \geqslant b_k$ и $b_{k+1} \geqslant b_k$, индукцией по $k = 0, 1, \ldots, N$. При $k = 0, 1, 2$ неравенства очевидны; для перехода, чтобы доказать неравенство при некотором $k \geqslant 3$, достаточно заметить, что

$$a_{N-k} \geqslant a_{N-k+2} + a_{N-k+3} + 1 \geqslant b_{k-2} + b_{k-3} + 1 = b_k,$$
$$b_{k+1} = b_{k-1} + b_{k-2} + 1 \geqslant b_{k-2} + b_{k-3} + 1 = b_k.$$

Итак, мы получаем, что $a_0 \geqslant b_N$. Приведём таблицу первых значений чисел b_k:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b_k	0	0	0	1	1	2	3	4	6	8	11	15	20	27	36	48	64	85	113	150	199

Значит, из условия $b_N \leqslant 150$ получаем, что $N \leqslant 19$.

Пример, когда дети могут сделать 19 ходов, следует из построения выше. Изначально у каждого ребёнка по $b_{19} = 150$ клубней. Пусть дети действуют так, чтобы после k-го (с начала) хода у перекладывавшего оставалось ровно b_{19-k} клубней; тогда на k-м (с начала) ходе ребёнок перекладывает $300 - b_{20-k} - b_{19-k}$

клубней, а перед любым предыдущим его ходом у него будет $300 - b_i$ клубней при $i \geqslant 17 - k$, причём $300 - b_i \leqslant 300 - b_{17-k} < < 300 - b_{19-k} - b_{20-k}$. Значит, этот ход удовлетворяет условию, и дети могут сделать 19 таких ходов.

Замечание. Приведённый алгоритм почти единственен; именно, в любом примере, где делается 19 ходов, ситуация после каждого хода, *кроме первого*, должна быть такой же, как в приведённом примере.

9.4. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle D = = 90°$. Его диагонали пересекаются в точке E. Прямая ℓ пересекает отрезки AB, CD, AE и ED в точках X, Y, Z и T соответственно. Известно, что $AZ = CE$ и $BE = DT$. Докажите, что длина отрезка XY равна диаметру окружности, описанной около треугольника ETZ. (*А. Кузнецов, И. Фролов*)

Решение. Применяя теорему Менелая к треугольнику ETZ и секущим AXB и CYD, получаем

$$\frac{AZ}{AE} \cdot \frac{BE}{BT} \cdot \frac{XT}{XZ} = \frac{CE}{CZ} \cdot \frac{DT}{DE} \cdot \frac{YZ}{YT} = 1.$$

Из равенств $AZ = CE$ и $BE = DT$ следует, что $AE = CZ$ и $BT = DE$. Подставляя все эти равенства, получаем, что

$$\frac{XT}{XZ} = \frac{YZ}{YT};$$

это означает, что точки X и Y симметричны относительно середины S отрезка ZT (см. рис. 1).

Из условия следует, что лучи AB и DC пересекаются в некоторой точке F под прямым углом. Тогда в прямоугольном треугольнике XFY медиана FS равна половине гипотенузы XY.

Обозначим через M и N середины AD и BC соответственно, а через O — центр окружности $(ABCD)$. Тогда O — точка пересечения серединных перпендикуляров к AC и BD, которые совпадают с серединными перпендикулярами к EZ и ET соответственно. Значит, O — также центр окружности (ETZ), а OE — её радиус. Поэтому нам достаточно доказать, что $OE = FS$. Мы докажем, что $OEFS$ — параллелограмм, откуда это и следует.

Поскольку EN — медиана в треугольнике EBC, а MS — отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырёхугольника $AZTD$, имеем

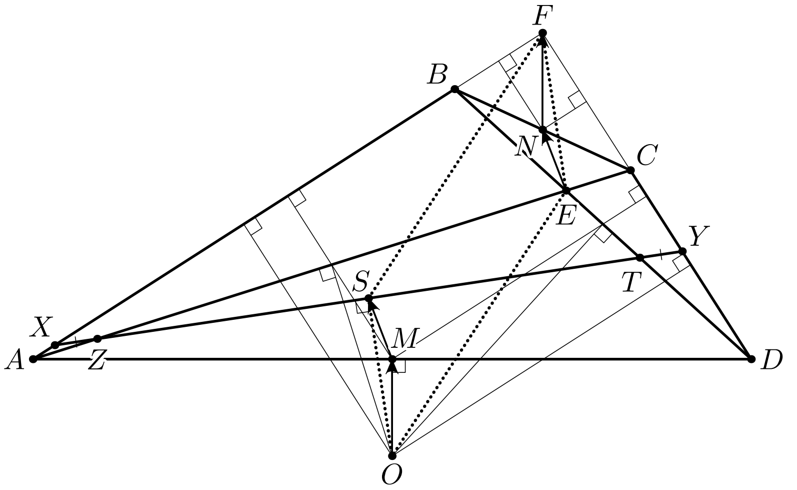

Рис. 1

$$\overrightarrow{EN} = \frac{\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}}{2} = \frac{\overrightarrow{DT} + \overrightarrow{AZ}}{2} = \overrightarrow{MS}.$$

В прямоугольном треугольнике FBC проекции вектора медианы $\overrightarrow{NF}$ на прямые BF и CF равны $\overrightarrow{BF}/2$ и $\overrightarrow{CF}/2$ соответственно. Поскольку O и M — центры окружностей $(ABCD)$ и (ADF) соответственно, при проекции на те же прямые первая попадает в середины отрезков AB и CD, а вторая — в середины AF и DF. Поэтому проекции вектора $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DO}$ на эти прямые равны $(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB})/2 = \overrightarrow{BF}/2$ и $(\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DC})/2 = \overrightarrow{CF}/2$. Значит, проекции векторов $\overrightarrow{NF}$ и $\overrightarrow{OM}$ на наши две прямые соответственно равны, откуда $\overrightarrow{NF} = \overrightarrow{OM}$.

Итак, $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{NF} + \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EF}$, откуда и следует, что $OEFS$ — параллелограмм.

Замечание. Есть и другие доказательства того, что $OEFS$ — параллелограмм. Например, можно использовать тот факт, что точки O и F изогонально сопряжены относительно треугольника ADE.

Также задачу можно решить, используя методы из решения задачи 10.4.

9.5. Квартал представляет собой клетчатый квадрат 10×10. В новогоднюю ночь внезапно впервые пошёл снег, и с тех пор каждую ночь на каждую клетку выпадало ровно по 10 см снега; снег падал только по ночам. Каждое утро дворник выбирает один ряд (строку или столбец) и сгребает весь снег оттуда на один из соседних рядов (с каждой клетки — на соседнюю по стороне). Например, он может выбрать седьмой столбец и из каждой его клетки сгрести весь снег в клетку слева от неё. Сгребать снег за пределы квартала нельзя. Вечером сотого дня года в город приедет инспектор и найдёт клетку, на которой лежит сугроб наибольшей высоты. Цель дворника — добиться, чтобы эта высота была минимальна. Сугроб какой высоты найдёт инспектор?

(*А. Солынин*)

Ответ. 1120 см.

Решение. Будем измерять высоту сугроба в дециметрах. Также будем считать, что сторона одной клетки равна 1 дм, то есть за каждую ночь на клетку выпадает 1 дм^3 снега.

Докажем, что после сотого утра найдется сугроб высотой не менее 112 дм. Предположим, что такого сугроба нет. Так как дворник в сотое утро полностью сгрёб снег с какого-то ряда, в десяти клетках квадрата снега нет. В каждой из оставшихся 90 клеток, по нашему предположению, не более 111 дм^3 снега, то есть всего снега не больше, чем 9990 дм^3. Однако за 100 ночей суммарно выпало 10 000 дм^3 снега. Противоречие.

Покажем, как может действовать дворник, чтобы после сотого утра каждый сугроб имел высоту не более 112 дм (то есть в каждой клетке было не более 112 дм^3 снега).

Способ 1. Первые 11 дней дворник сгребает снег из второго столбца в первый, следующие 11 дней дворник сгребает снег из третьего столбца во второй, затем 11 дней из четвёртого в третий, и т. д. Через 99 дней в десятом столбце не будет снега. Посчитаем, сколько снега стало в столбце $i \leqslant 9$ через 99 дней. Вечером $11(i-1)$-го дня в столбце номер i не было снега, а в столбце $i+1$ в каждой клетке было по $11(i-1)$ дм^3 снега. На следующий вечер в столбце i станет по $11(i-1)+2$ дм^3 снега в каждой клетке. Затем ещё десять дней количество снега в каждой клетке i-го столбца будет увеличиваться на 2, а затем $11(9-i)$ дней — на 1. Итого, через 99 дней в каждой клетке столбца i будет по $11(i-1)+22+11(9-i)=110$ дм^3 снега. В сотую ночь выпадет ещё по 1 дм^3 в каждую клетку. А сотым утром дворник сгребет снег из десятого столбца в девятый. Таким образом, в каждой клетке будет не более 112 дм^3 снега.

Способ 2. Пусть дворник сгребёт снег из 2-го столбца в 1-ый, из 3-го во 2-й, ..., из 10-го в 9-ый. Тогда вечером девятого дня в первых девяти столбцах будет по 10 дм^3 снега в каждой клетке, а в десятом столбце снега не будем. Затем дворник проделывает аналогичный процесс в обратном порядке: из 9-го в 10-ый, из 8-го в 9-ый, ..., из 2-го в первой. Тогда вечером 18-го дня в клетках последних девяти столбцов будет по 20 дм^3 снега, а в первом столбце не будет снега. Аналогично повторим такие сдвиги (каждый длится 9 дней) ещё 9 раз, и через 99 дней получим в клетках девяти столбцов по 110 дм^3 снега и один крайний столбец пустой. Сотым утром сгребаем снег из этого крайнего в соседний и получаем не более 112 дм^3 снега в каждой клетке.

9.6. Высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < AC$, пересекаются в точке H, а O — центр описанной около него окружности Ω. Отрезок OH пересекает описанную около треугольника BHC окружность в точке X, отличной от O и H. Окружность, описанная около треугольника AOX, пересекает меньшую дугу AB окружности Ω в точке Y. Докажите, что прямая XY делит отрезок BC пополам. (*А. Терёшин*)

Первое решение. Пусть H' и X' — точки, симметричные точкам H и X относительно середины стороны BC соответственно (см. рис. 2). Тогда $HXH'X'$ — параллелограмм. Так как $\angle BX'C = \angle BH'C = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, точки X' и H' лежат на окружности Ω. При этом, поскольку $H'B \parallel CH \perp AB$, точка H' диаметрально противоположна точке A на этой окружности; следовательно, AH' проходит через O. Вспоминая, что $XO \parallel H'X'$, получаем $\angle AYX' = 180^\circ - \angle AH'X' = 180^\circ - \angle AOX = \angle AYX$; это и означает, что точки Y, X и X' лежат на одной прямой, делящей BC пополам.

Второе решение. Поскольку $\angle BHC = 180^\circ - \angle ABC$, окружность (BHC) симметрична окружности Ω относительно BC; пусть O' — центр окружности BHC, а M — середина BC. Тогда M — ещё и середина OO'.

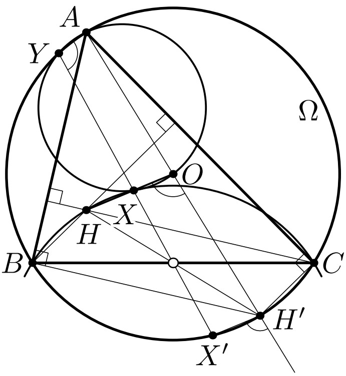

Рис. 2

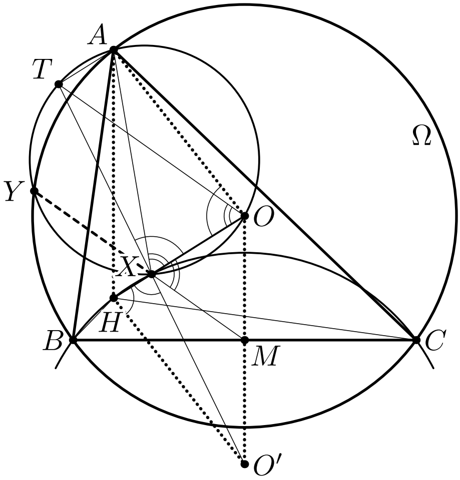

Рис. 3

Как известно, $AH = 2OM$ (это доказывается, например, с помощью гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC и коэффициентом -2). Поэтому $OO' = 2OM = AH$. Поскольку $OO' \perp BC \perp AH$, четырёхугольник $AHO'O$ — параллелограмм.

Пусть T — точка на луче $O'X$ такая, что $O'T = 2O'X$. Тогда $XT = O'X = O'H = AO$. Кроме того, из равнобедренности треугольника $O'XH$ получаем, что $\angle TXO = \angle O'XH = \angle O'HX = \angle AOX$, поэтому треугольники TXO и AOX равны. Значит, $\angle TOX = \angle AXO$.

Поскольку XM — средняя линия в треугольнике $O'TO$, получаем $\angle MXO = \angle TOX = \angle AXO$, то есть XO — биссектриса угла AXM. Но в окружности $(AXOY)$ имеем $OA = OY$, так что O — середина дуги AXY, а потому XO — внешняя биссектриса угла AXY. Отсюда и следует, что углы AXM и YXM смежные, то есть точки X, Y и M лежат на одной прямой.

Замечание. Приведём ещё несколько свойств конфигурации, которые могут оказаться полезными для решения (все обозначения взяты из решений выше).

Точки A и X' симметричны относительно прямой OH; в частности, $XA = XX' = 2XM$.

Можно указать ещё несколько точек, лежащих на окружности $(AOXY)$. Например, это точка пересечения отрезка AM с окружностью (BHC), а также точка, диаметрально противоположная точке O' в окружности $(BO'C)$.

9.7. На доске написаны 8 различных квадратных трёхчленов; среди них нет двух, дающих в сумме нулевой многочлен. Оказалось, что если выбрать любые два трёхчлена $g_1(x)$, $g_2(x)$ с доски, то оставшиеся 6 трёхчленов можно обозначить как $g_3(x)$, $g_4(x)$, …, $g_8(x)$ так, что у всех четырёх многочленов $g_1(x) + g_2(x)$, $g_3(x) + g_4(x)$, $g_5(x) + g_6(x)$ и $g_7(x) + g_8(x)$ есть общий корень. Обязательно ли все трёхчлены на доске имеют общий корень?

(*С. Берлов, методкомиссия*)

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Построим пример 8 квадратных трёхчленов, удовлетворяющих условию задачи:

$$f_1(x) = -x^2 + 2; \quad f_2(x) = 3x^2 - 2; \quad f_3(x) = -4x^2 + 3;$$
$$f_4(x) = 2x^2 - 3; \quad f_5(x) = -4x^2 + x + 4; \quad f_6(x) = 4x^2 + x - 4;$$
$$f_7(x) = -5x^2 - x + 5; \quad f_8(x) = 5x^2 - x - 5.$$

Данные многочлены составлены так, чтобы их значения в точках $x = -1$, 0, 1 соответствовали следующей таблице:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
0	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1

У трёхчленов этого примера нет общего корня (его нет даже у $f_1(x)$ и $f_2(x)$). Осталось показать, что они удовлетворяет условию. Очевидно, никакие два из этих трёхчленов не дают в сумме ноль.

Пусть выбрана какая-то пара из этих квадратных трёхчленов. Если была выбрана пара $(f_{2k-1}(x), f_{2k}(x))$, где $k = 1, 2, 3, 4$, то все многочлены можно разбить на пары $(f_1(x), f_2(x))$; $(f_3(x), f_4(x))$; $(f_5(x), f_6(x))$; $(f_7(x), f_8(x))$, каждая сумма этих пар имеет корень 0.

В противном случае нетрудно убедиться, что значение суммы двух выбранных трёхчленов или в точке $x_0 = -1$, или в точке $x_0 = 1$ (а может быть, и в обеих сразу) равняется нулю. Выберем такое x_0. Оставшиеся многочлены в точке x_0 принимают значения -1 и 1 ровно по три раза, и их можно разбить на пары так, чтобы в x_0 суммы всех четырёх пар равнялись нулю, т.е. x_0 было их общим корнем.

9.8. 1000 детей, среди которых нет двух одинакового роста, выстроились в шеренгу. Назовём пару различных детей (a, b) *хорошей*, если между ними не стоит ребёнка, рост которого больше роста одного из a и b, но меньше роста другого. Какое наибольшее количество хороших пар могло образоваться? (Пары (a, b) и (b, a) считаются одной и той же парой.) (*И. Богданов*)

Ответ. $501^2 - 3 = 250998$.

Решение. Докажем, что в аналогичной задаче для шеренги из $2n$ детей наибольшее возможное количество хороших пар равно $(n+1)^2 - 3$.

Пронумеруем детей числами $1, 2, \ldots, 2n$ в порядке убывания роста. Тогда, если расставить детей в порядке

$$n+1, n+2, \ldots, 2n,\ 1, 2, \ldots, n,$$

то все пары (i, j), где $i \leqslant n < j$, окажутся хорошими; таких пар всего n^2. Кроме этого, все пары вида $(i, i+1)$ также окажутся хорошими; таких пар всего $2n-1$. При этом пара $(n, n+1)$ учтена дважды, так что общее количество хороших пар равно $n^2 + (2n-1) - 1 = (n+1)^2 - 3$.

Осталось доказать, что хороших пар не может быть больше, чем $(n+1)^2 - 3$. Сделаем это индукцией по n. При $n = 1$ утверждение тривиально, ибо есть всего одна пара детей.

Пусть теперь $n > 1$. Рассмотрим произвольную шеренгу и выберем в ней хорошую пару (a, b), в которой $|a-b|$ — наибольшее; пусть для определённости $a < b$, и ребёнок a стоит левее, чем b. Назовём ребёнка c *прекрасным*, если он образует хорошие пары как с a, так и с b.

Лемма. *Существует не больше двух прекрасных детей.*

Доказательство. Если c прекрасен, то по выбору пары (a, b) имеем $c - a \leqslant b - a$ и $b - c \leqslant b - a$, откуда $a < c < b$. Такой ребёнок c не может стоять между a и b, иначе пара (a, b) не была бы хорошей; значит, любой прекрасный ребёнок стоит либо слева от a, либо справа от b.

Предположим, что есть два прекрасных ребёнка $c_1 < c_2$, стоящих левее a; тогда $a < c_1 < c_2 < b$. Ребёнок c_1 не может стоять между a и c_2, иначе пара (a, c_2) не хорошая; поэтому c_1 стоит левее c_2. Но тогда c_2 стоит между c_1 и b, и пара (c_1, b) — не хорошая, что невозможно. Это противоречие показывает, что левее a стоит не более одного прекрасного ребёнка. Аналогично, не более одного стоит правее b, откуда и следует доказываемое утверждение. $\square$

Теперь несложно совершить переход индукции. Выкинув a и b, мы получим, что все хорошие пары, не содержащие a и b, остались хорошими; по предположению индукции, их не больше, чем $n^2 - 3$. Осталось оценить количество хороших пар, содержащих a или b. Это пара (a, b), пары (a, c) и (b, c) для любого прекрасного ребёнка c, и максимум по одной из пар (a, c) и (b, c) для остальных детей c. Всего получаем не более чем $1 + (2n - 2) + 2 = 2n + 1$ пар, откуда общее количество хороших пар не превосходит $(n^2 - 3) + (2n + 1) = (n + 1)^2 - 3$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пару детей a и b, для которых верно утверждение леммы, можно выбирать разными способами. Можно, например, выбрать хорошую пару, в которой дети стоят дальше всего друг от друга. Другой способ — выбрать $a = 1$ и найти наибольшее b такое, что $(1, b)$ — хорошая пара.

10 класс

10.1. Пусть p и q — различные простые числа. Дана бесконечная убывающая арифметическая прогрессия, в которой встречается каждое из чисел p^{23}, p^{24}, q^{23} и q^{24}. Докажите, что в этой прогрессии обязательно встретятся числа p и q.

(*А. Кузнецов, методкомиссия*)

Решение. Вычеркнем все нецелые числа из прогрессии (если они есть). Ясно, что после вычёркивания остаётся бесконечная убывающая арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел. Пусть её разность равна $-d$.

Заметим, что $q^{23}-p^{23}$ делится на d, значит, d не делится на p, иначе q^{23} должно будет делиться на p, что неверно. С другой стороны, d должно являться делителем числа $p^{24}-p^{23}=p^{23}(p-1)$. Поскольку p и d взаимно просты, $p-1$ делится на d. Далее, $p^{23}-p$ делится на $p-1$ (поскольку оно равно $p(p-1)(p^{21}+p^{20}+\ldots+1)$). Поэтому $p^{23}-p$ делится на d, и, поскольку $p<p^{23}$, получаем, что p лежит в нашей прогрессии. Аналогично, q лежит в этой прогрессии.

10.2. Дано нечётное число $n \geqslant 3$. В клетчатом квадрате $2n \times 2n$ закрашивают $2(n-1)^2$ клеток. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно гарантированно вырезать из незакрашенной клетчатой фигуры? (*Г. Шарафетдинова*)

Ответ. $2n-1$.

Решение. *Оценка.* Разобьём квадрат $2n\times 2n$ на n^2 квадратиков 2×2.

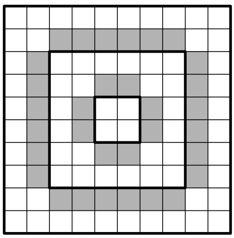

Рис. 4

Среди этих квадратиков не более $2(n-1)^2/2=(n-1)^2$ квадратиков, в которых покрашено хотя бы 2 клетки. Остальных квадратиков 2×2 — не менее $n^2-(n-1)^2=2n-1$ штук. Из каждого из них можно вырезать трёхклеточный уголок.

Пример. Построим пример индукцией по нечётным $n \geqslant 1$. При $n=1$ закрашенных клеток нет, и можно вырезать один уголок.

Для перехода выделим в квадрате внешнюю «рамку» шириной в две клетки. В этой рамке закрасим все $8(n-2)$ клетки, примыкающие к внутренней границе рамки (см. рис. 4), а в квадрате внутри рамки закрасим клетки по предположению индукции. Общее количество закрашенных клеток равно $2(n-3)^2+8(n-2)=2(n-1)^2$.

Осталось понять, сколько уголков можно вырезать в этом примере. Любой уголок из непокрашенных клеток целиком лежит либо в рамке, либо во внутреннем квадрате (таких по предположению $2(n-2)-1=2n-5$). Из рамки же нельзя вырезать более 4 уголков — каждый такой уголок должен содержать хотя бы 2 клетки одного из угловых квадратов 2×2, а двух уголков, пересекающихся с одним квадратом, вырезать нельзя. Значит, общее количество уголков не больше $(2n-5)+4=2n-1$.

10.3. Дано натуральное число n. Илья задумал пару различных многочленов степени n (с вещественными коэффициентами), аналогично Саша задумал пару различных многочленов степени n. Лёня знает n; его цель — выяснить, одинаковые ли пары многочленов у Ильи и Саши. Лёня выбирает набор из k вещественных чисел $x_1<x_2<\ldots<x_k$ и сообщает эти числа. В ответ Илья заполняет таблицу $2\times k$: для каждого $i=1, 2, \ldots, k$ он вписывает в две клетки i-го столбца пару чисел $P(x_i)$, $Q(x_i)$ (в любом из двух возможных порядков), где P и Q — задуманные им многочлены. Аналогичную таблицу заполняет Саша. При каком наименьшем k Лёня сможет (глядя на таблицы) наверняка добиться цели? (*Л. Шатунов*)

Ответ. $2n+1$.

Решение. Покажем, что при $k=2n$ (а тем более при $k<2n$) Лёня не сможет однозначно определить определить пару P, Q. Пусть он назвал $x_1<x_2<\ldots<x_{2n}$. Положим $A=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, $B=(x-x_{n+1})(x-x_{n+2})\ldots(x-x_{2n})$, так что $A(x_i)=0$ для $i=1, 2, \ldots, n$ и $B(x_i)=0$ для $i=n+1, n+2, \ldots, 2n$. Тогда если Илья загадал $P_1=A+2B$ и $Q_1=-A-2B$, то в i-м столбце таблицы будут числа $\pm 2B(x_i)$ при $i=1, 2, \ldots, n$ и числа $\pm A(x_i)$ при $i=n+1, n+2, \ldots, 2n$. Но та же таблица годится для пары $P_2=A-2B$ и $Q_2=-A+2B$, её мог загадать Саша.

С другой стороны, покажем, что при $k=2n+1$ таблице

Ильи может удовлетворять не более одной пары многочленов P, Q. Предположим противное, и есть две такие пары: P_1, Q_1 и P_2, Q_2. Тогда P_2 совпадает с P_1 или Q_1 хотя бы при $n+1$ различных значениях аргумента, пусть, скажем, с P_1. Но тогда P_1 и P_2 — одинаковые многочлены (поскольку их разность — многочлен степени не выше n, имеющий не менее $n+1$ различных корней). Из таблицы тогда получаем, что значения Q_1 и Q_2 совпадают в $2n+1$ точке, а тогда и $Q_1 = Q_2$.

10.4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle D = 90°$, его диагонали пересекаются в точке E. Прямая ℓ пересекает отрезки AB, CD, AE и ED в точках X, Y, Z и T соответственно. Известно, что $AZ = CE$ и $BE = DT$. Докажите, что длина отрезка XY не больше диаметра описанной окружности треугольника ETZ. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим через ω окружность (ETZ) и через d — её диаметр. Поскольку $BE = DT$, то $BT = BE+ET = DT+ET = DE$. Из условия $\angle A + \angle D = 90°$ следует, что лучи AB и DC пересекаются в некоторой точке F под прямым углом (см. рис. 5). Проведем диаметр EB' в окружности (ABE). Поскольку $\angle ABE > 90°$, точки идут на окружности в порядке $A - B - E - B'$. Тогда $\angle AB'B = \angle AEB = \angle CED$ и $\angle BAB' = 90° + \angle FAC = \angle ECD$. Следовательно, треугольники CED и $AB'B$ подобны по двум углам, поэтому $\frac{AB'}{BB'} = \frac{CE}{ED} = \frac{AZ}{BT}$. Полученное равенство означает, что прямоугольные треугольники $AB'Z$ и $BB'T$ подобны по отношению катетов. Тогда $\angle BTB' = \angle AZB'$, поэтому точка B' лежит на окружности ω. Заметим, что AB — прямая Симсона точки B' для треугольника ZET, поскольку $\angle B'AE = \angle B'BE = 90°$. Тогда и проекция B' на прямую ZT тоже лежит на AB, то есть $B'X \perp ZT$.

Рассуждая аналогично, мы получаем, что точка C', диаметрально противоположная E на окружности (CED), лежит на окружности ω, а также $C'Y \perp ZT$. Таким образом, $B'C'$ — хорда окружности ω, а X и Y — проекции точек B' и C' на прямую ZT, поэтому $XY \leqslant B'C' \leqslant d$, что и требовалось.

Замечание 1. Приведём схему другого решения.

Нетрудно показать, что $XZ = TY$ (например, используя

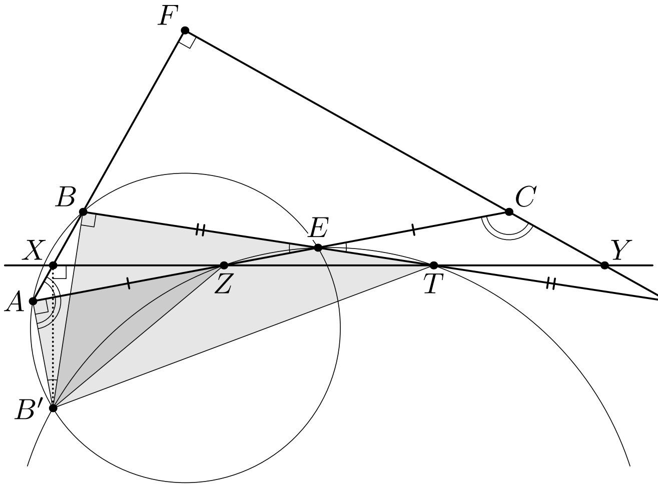

Рис. 5

теорему Менелая). Пусть M, N, K — середины AC (и ZE), BD (и TE), XY (и ZT) соответственно. Пусть $F = AB \cap CD$, Из прямоугольного треугольника XFY имеем $FK = XY/2$. Далее, KMN — серединный треугольник для треугольника EZT. Легкий счет углов (с использованием медианы прямоугольного треугольника) дает $\angle MFN = 180^\circ - \angle MEN = 180^\circ - \angle MKN$. Значит, точки M, K, N, F лежат на одной окружности, тогда FK — хорда окружности (MKN). Отсюда $XY/2 = KF \leqslant 2R_{MKN} = R_{ETZ}$, что завершает решение.

Замечание 2. На самом деле $B'C'$ — диаметр окружности (ETZ), что нетрудно установить счётом углов, но для решения этого не требуется. Равенство $XY = d$ достигается в том и только в том случае, когда исходный четырёхугольник — вписанный.

Замечание 3. Приведём план ещё одного подхода к задаче. Используем обозначения из приведённого выше решения, а также введём новые: $x = BF$, $y = AB$, $z = CF$, $t = DC$, $k = \dfrac{DE}{EB}$, $m = \dfrac{AE}{FC}$, $p = ZT$, $\alpha = \angle AED$. Из теорем Менелая для $\triangle EZT$ и прямой AYB; $\triangle EZT$ и прямой CYD находим: $XZ = YT = p \cdot \dfrac{1}{kl-1}$. По теореме синусов для треугольника ZET: $d = \dfrac{p}{\sin\alpha}$, в силу сказанного выше $XY = XZ + YZ + ZT = p \cdot \dfrac{kl+1}{kl-1}$.

Таким образом, достаточно доказать, что $\sin\alpha \leqslant \dfrac{kl-1}{kl+1}(\star)$. Из теорем Менелая для $\triangle AFC$ и прямой BED; $\triangle BFD$ и прямой AEC легко видеть, что $k = \dfrac{t(x+y)}{zy}$, $l = \dfrac{y(z+t)}{xt}$, отсюда $kl = \dfrac{(x+y)(z+t)}{xz}$ и $\dfrac{kl-1}{kl+1} = \dfrac{(x+y)(z+t)-xz}{(x+y)(z+t)+xz}$.

Обозначим $\angle FAC = \beta$, $\angle FDB = \gamma$, тогда $\alpha = 90^\circ + \beta + \gamma$. Значит, $\sin\alpha = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta = \dfrac{(x+y)(z+t)-xz}{\sqrt{(x^2+(z+t)^2)(z^2+(x+y)^2)}}$, последнее равенство получается из прямоугольных треугольников AFC и BFD. Остаётся заметить, что $\sqrt{(x^2+(z+t)^2)(z^2+(x+y)^2)} \geqslant xz + (z+t)(x+y)$ по неравенству Коши-Буняковского-Шварца, получаем в точности требуемое неравенство $(\star)$.

10.5. Дана прямолинейная дорога, выложенная из зелёных и красных дощечек (дорога — отрезок, разбитый на отрезки-дощечки). Цвета дощечек чередуются; первая и последняя дощечки — зелёные. Известно, что длины всех дощечек больше сантиметра и меньше метра, а также что длина каждой следующей дощечки больше предыдущей. Кузнечик хочет пропрыгать вперёд по дороге по этим дощечкам, наступив на каждую зелёную дощечку хотя бы один раз и не наступив ни на одну красную дощечку (или границу между соседними дощечками). Докажите, что кузнечик может сделать это так, чтобы среди длин его прыжков встретилось не более 8 различных значений. (*Т. Коротченко*)

Решение. Считаем, что дощечки выложены на числовой прямой. Примем $1 = 1$ см.

Возьмем $0 < \varepsilon < 0,01$ такое, что разность длин любой пары соседних дощечек больше 10ε. Отметим на прямой бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью ε так, чтобы концы дощечек не были отмечены. Кузнечик будет прыгать только по отмеченным точкам, и длины его прыжков будут из множества $\{\varepsilon, \ell, 2\ell, 4\ell, 8\ell, 16\ell, 32\ell, 64\ell\}$, где $\ell = N\varepsilon$, а натуральное N подберём так, что $\ell < 2$ и $64\ell > 101$.

Стратегия кузнечика будет такой: прыгать вправо по зелёной дощечке на ε пока возможно, и далее перепрыгивать очередную красную дощечку прыжком минимальной возможной длины (такая длина найдётся, поскольку длина самого длинного прыжка больше $100+\varepsilon$). Итак, пусть сделан прыжок длины $2d$ из зелёного отрезка через очередной красный отрезок $[a,b]$. Нам остаётся убедиться, что после этого прыжка кузнечик окажется в следующем зелёном отрезке $[b,c]$. Предположим, что это не так, и кузнечик из точки $a-x$, где $0<x<\varepsilon$ перепрыгнул в точку $a-x+2d>c$. Видим, что $2d>(c-b)+(b-a)>2$, значит, в множестве длин прыжков кузнечика есть длина d. Далее, по выбору ε, имеем $(c-b)>(a-b)+10\varepsilon$, поэтому можем оценить $2d>(c-b)+(b-a)>2(b-a)+10\varepsilon$. Видим, что $d>(b-a)+\varepsilon$, а значит, кузнечик мог из точки $a-x$ перепрыгнуть красный отрезок $[a,b]$ прыжком более коротким, чем $2d$. Противоречие.

10.6. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина дуги ABC окружности, описанной около треугольника ABC. На отрезке AD отмечена точка E, а на отрезке CD — точка F. Известно, что $ME=MD=MF$. Докажите, что точки B, M, E и F лежат на одной окружности. (*А. Терёшин*)

Первое решение. Пусть $\angle ADC=x$. Из равнобедренных треугольников DME и DMF (или из того, что M — центр окружности (DEF)) имеем $\angle EMF=360^\circ-2x$ (см. рис. 6). Для решения задачи остаётся понять, что тому же равен $\angle EBF$.

При гомотетии с центром D и коэффициентом $1/2$ точки E, F, B перейдут соответственно в E', F', B' — середины отрезков DE, DF и DB. Вместо $\angle EBF$ найдём $\angle E'B'F'$, заметив, что E' и F' — проекции M на AD и CD, а B' — центр параллелограмма, или середина AC, тем самым, B' — проекция M на AC. Видим, что M, E', A, B' лежат на одной окружности с диаметром MA. Отсюда $\angle DE'B'=\angle AMB'=\angle AMC/2=\angle ABC/2=x/2$. Аналогично $\angle DF'B'=x/2$. Из четырёхугольника $E'B'F'D$ видим, что $\angle E'B'F'=360^\circ-x-x/2-x/2=360^\circ-2x$, что и требовалось.

Второе решение. Достаточно доказать равенство углов $\angle ABE=\angle CBF$ (т.е. изогональность BE и BF относительно AB, BC). Действительно, тогда M будет лежать на внешней биссектрисе угла EBF и на серединном перпендикуляре к EF, а значит, будет совпадать с серединой дуги (EBF).

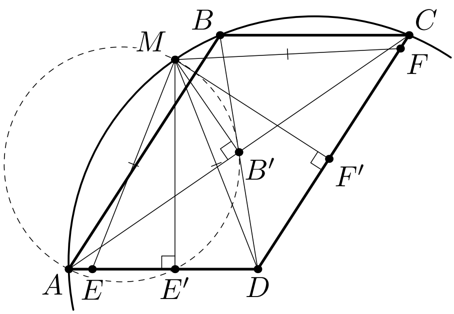

Рис. 6

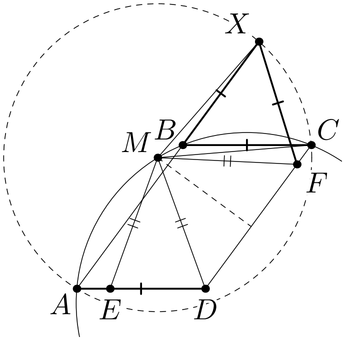

Рис. 7

Равенство углов $\angle ABE = \angle CBF$, в свою очередь, эквивалентно подобию $ABE \sim CBF$. Докажем это подобие.

Отметим на луче AB за точкой B точку X так, что $BX = BC$, а на луче CB за точкой B точку Y так, что $BY = BA$. Легко понять, что треугольники BMC и BMX равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $MX = MC = MA$. Рассмотрим серединный перпендикуляр к DF, тогда он является перпендикуляром к параллельной прямой AX, а поскольку $MA = MX$, то он же является серединным перпендикуляром к AX. Таким образом, трапеция $ADFX$ равнобедренная, а раз $ABCD$ — параллелограмм, то $CXBF$ — также равнобедренная трапеция, причём $CB = BX = XF$ и $\angle XBC = 180^\circ - \angle ABC$. Аналогичное получим для трапеции $AYBE$. Видим, что $AYBE \sim CXBF$, откуда следует нужное нам $ABE \sim CBF$.

Замечание. Требуемое в решении 2 подобие $ABE \sim CBF$ можно доказать и по-другому — установив равенство $AE \cdot BC = CF \cdot AB$. Последнее можно сделать, например, счётом в синусах через элементы треугольника ABC, выразив проекцию AM на AD, далее выразив отрезок AE и т.д.

Имеются и другие вычислительные решения, в том числе с использованием комплексных чисел.

10.7. Пусть даны натуральные числа x_1 и x_2. На прямой даны y_1 белых отрезков и y_2 чёрных отрезков, при этом $y_1 \geqslant x_1$ и $y_2 \geqslant x_2$. Известно, что никакие два отрезка одного цвета не пересекаются (даже не имеют общих концов). Также известно, что при любом выборе x_1 белых отрезков и x_2 чёрных отрезков обязательно какая-то пара выбранных отрезков будет пересекаться. Докажите, что

$$(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) < x_1 x_2.$$

(*Г. Челноков*)

Первое решение. Пронумеруем белые отрезки слева направо как $w_1, w_2, \ldots, w_{y_1}$, а чёрные — как $b_1, b_2, \ldots, b_{y_2}$. Для каждого чёрного отрезка b_j назовём его *силой* $S(b_j)$ количество индексов $i \leqslant y_1 - 1$ таких, что b_j пересекается как с w_i, так и с w_{i+1}. Если с какой-то парой (w_i, w_{i+1}) пересекаются два чёрных отрезка, то они имеют общую точку, что невозможно по условию. Поэтому каждая такая пара учтена в силе не более, чем одного чёрного отрезка, а значит,

$$\sum_{j=1}^{y_2} S(b_j) \leqslant y_1 - 1.$$

Рассмотрим следующие y_1 групп, состоящих из x_1 белых отрезков каждая: при $0 \leqslant i \leqslant y_1 - x_1$ группа G_i состоит из отрезков $w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_{i+x_1}$, а при $y_1 - x_1 + 1 \leqslant i \leqslant y_1 - 1$ группа G_i состоит из отрезков $w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_{y_1}$, а также из $w_1, w_2, \ldots, w_{i+x_1-y_1}$ (иначе говоря, каждая группа состоит из x_1 последовательных отрезков в циклическом порядке). Для группы G_i обозначим через $N(G_i)$ количество чёрных отрезков, не пересекающихся ни с одним из отрезков в G_i. По условию, $N(G_i) \leqslant x_2 - 1$; поэтому

$$\Sigma := \sum_{i=0}^{y_1-1} N(G_i) \leqslant y_1(x_2 - 1).$$

С другой стороны, каждый чёрный отрезок b_j пересекается максимум с $1 + S(b_j)$ белыми отрезками, и все эти белые отрезки расположены подряд. Тогда количество групп, содержащих хотя бы один из этих белых отрезков, не превосходит $1 + S(b_j) + (x_1 - 1) = S(b_j) + x_1$. Поэтому отрезок b_j учтён хотя бы в $y_1 - (S(b_j) + x_1)$ числах вида $N(G_i)$. Поэтому

$$\Sigma \geqslant \sum_{j=1}^{y_2} (y_1 - S(b_j) - x_1) = y_2(y_1 - x_1) - \sum_{j=1}^{y_2} S(b_j) \geqslant$$

$$\geqslant y_2(y_1 - x_1) - (y_1 - 1).$$

Из полученных двух оценок на Σ вытекает, что
$y_1(x_2-1) \geqslant y_2(y_1-x_1)-(y_1-1) \iff (y_1-x_1)(y_2-x_2) \leqslant x_1x_2-1$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Предположим, что утверждение задачи для некоторых x_1, x_2, y_1, y_2 неверно: $(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \geqslant x_1x_2$, и при этом условии сумма $y_1 + y_2$ — минимальная возможная.

Без ограничения общности тогда $y_1 - x_1 \geqslant x_1$. Возьмём x_1-й слева белый отрезок W и $(y_2 - x_2)$-й слева чёрный отрезок B. У какого-то из них правый конец левее.

1) Пусть правый конец W левее (или концы совпадают). Тогда правые x_2 чёрных отрезков не пересекаются с левыми x_1 белыми. Противоречие.

2) Пусть правый конец B левее. Выкинем все белые отрезки слева от W (включая его) и все чёрные отрезки слева от B (включая его). Оставшиеся белые отрезки (их хотя бы x_1) не пересекаются с выкинутыми y_2-x_2 чёрными; отсюда уже следует, что $y_2 - x_2 < x_2$.

Положим $x'_1 = x_1$, $y'_1 = y_1 - x_1 \geqslant x'_1$, $x'_2 = x_2 - (y_2 - x_2)$ и $y'_2 = y_2 - (y_2 - x_2) = x_2 \geqslant x'_2$; тогда осталось y'_1 белых и y'_2 чёрных отрезков. Рассмотрим любые x'_1 оставшихся белых и x'_2 оставшихся чёрных отрезков. Если среди них нет пересекающихся, то, добавив к ним все выкинутые чёрные отрезки, получим набор из $x_1 = x'_1$ белых и $x_2 = x'_2 + (y_2 - x_2)$ чёрных отрезков исходного набора, среди которых нет пересекающихся; это невозможно. Значит, оставшийся набор удовлетворяет условию (для новых чисел x'_1, y'_1, x'_2 и y'_2), при этом в нём меньше отрезков, чем в исходном, поэтому

$$\begin{aligned}0 < x'_1x'_2 - (y'_1 - x'_1)(y'_2 - x'_2) &= \\ = x_1(2x_2 - y_2) - (y_1 - 2x_1)(y_2 - x_2) &= \\ = x_1x_2 - (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) &\leqslant 0.\end{aligned}$$

Противоречие.

Замечание. Отметим, что при $x_1 = x_2 = 1$ утверждение задачи превращается в *двухцветную (одномерную) теорему Хелли.*

10.8. Дано натуральное $n > 2$. Маша записывает по кругу n натуральных чисел. Далее Тая делает такую операцию: между каждыми двумя соседними числами a и b она пишет некоторый делитель числа $a+b$, больший 1; затем Тая стирает исходные числа и получает новый набор из n чисел, стоящих по кругу. Всегда ли Тая может выполнять операции таким образом, чтобы через несколько операций все числа оказались равными?

(*Т. Коротченко*)

Ответ. Да.

Решение. Будем наращивать множество ситуаций, в которых Тая побеждает (т.е. сможет получить n равных чисел).

(1) Пусть у нас n нечётных чисел.

Тогда за одну операцию можно получить n двоек.

(2) Пусть никакая сумма двух соседних чисел не является степенью двойки.

Тогда за одну операцию можно получить ситуацию (1).

(3) Пусть среднее арифметическое s всех чисел не равно степени двойки.

Покажем, что сможем прийти к ситуации (2). Воспользуемся следующей леммой, доказательство которой приведём в конце решения.

Лемма. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — вещественные числа, s — их среднее арифметическое. За один ход меняем набор $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_n+a_1}{2}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ через несколько ходов все числа будут лежать в интервале $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$.*

Ясно, что $s > 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы интервал $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ целиком помещался между соседними степенями двойки: $2^{t-1} < s-\varepsilon < s+\varepsilon < 2^t$ для некоторого натурального t. Будем проводить много раз операцию замены пары соседней на их сумму. Тогда, согласно лемме, найдётся N такое, что после N операций все числа будут лежать в интервале $(2^N(s-\varepsilon), 2^N(s+\varepsilon))$, а значит, в интервале между соседними степенями двойки $2^N \cdot 2^{t-1}$ и $2^N \cdot 2^t$. Значит, после $(N-1)$ операции выполнялось условие (2).

(4) Пусть все числа не меньше 2.

Если мы не в ситуации (2), то есть пара соседей a, b, сумма которых равна 2^t, где $t \geqslant 2$ — натуральное. Попробуем сделать следующую операцию произвольно, только a и b заменим на число 2. Пусть в такой попытке мы не пришли в ситуацию (3), то есть получили ситуацию, в которой среднее арифметическое s равно степени двойки. Тогда сделаем другую попытку, в которой все пары меняются так же, только только a и b заменяются на 4. По сравнению с первой попыткой s увеличилось на $\frac{2}{n}$, поэтому мы окажемся в ситуации (3).

(5) Пусть набор исходных чисел произвольный. Тогда после одной операции имеем ситуацию (4).

Доказательство леммы. Сделаем переобозначения, пусть $s+x_0$, $s+x_1$, $\ldots$, $s+x_n$ — данные числа, так что $x_0+\ldots+x_n = 0$. Пусть $M = \max\{|x_0|, \ldots, |x_n|\}$. Ясно, что после хода M не увеличится. Достаточно понять, что что через некоторое количество k ходов этот максимум отклонения станет не более λM для некоторого фиксированного $0 < \lambda < 1$. Ниже увидим, что можно положить $k = n$ и $\lambda = \frac{2^n - n - 1}{2^n}$.

Через n ходов у нас будет набор $s + y_0$, $s + y_1$, $\ldots$, $s + y_n$, где $y_0 = \frac{1}{2^n}(x_0 + C_n^1 x_1 + C_n^2 x_2 + \ldots + C_n^{n-1} x_{n-1} + x_n)$ и т.д. Так как $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 0$, имеем $x_0 + C_n^1 x_1 + C_n^2 x_2 + \ldots + C_n^{n-1} x_{n-1} + x_n = (C_n^1 - 1)x_1 + (C_n^2 - 1)x_2 + \ldots + (C_n^{n-1} - 1)x_{n-1}$. Отсюда $|y_0| \leqslant \frac{1}{2^n}((C_n^1 - 1) + \ldots + (C_n^{n-1} - 1))M = \frac{2^n - n - 1}{2^n} M$. Аналогично все $|y_i| \leqslant \frac{2^n - n - 1}{2^n} M$. $\square$

11 класс

11.1. В пространстве расположен бесконечный цилиндр (т.е. геометрическое место точек, удалённых от данной прямой ℓ на данное расстояние $R > 0$). Могут ли шесть прямых, содержащих рёбра некоторого тетраэдра, иметь ровно по одной общей точке с этим цилиндром? (*А. Кузнецов*)

Ответ. Не могут.

Решение. Предположим, что такая конструкция существует. Спроецируем тетраэдр на плоскость α, перпендикулярную прямой ℓ. Проекцией цилиндра будет некоторая окружность ω. Обозначим проекции вершин тетраэдра через A, B, C, D, они все будут различны (в противном случае одна из прямых, содержащих стороны тетраэдра, будет параллельна ℓ, такая прямая не может иметь с цилиндром ровно одну общую точку). Каждая из прямых, соединяющих точки A, B, C, D должна иметь с окружностью ω одну общую точку, то есть касаться этой окружности. При этом точки A, B, C, D не могут лежать на одной прямой (поскольку вершины тетраэдра не лежат в одной плоскости). Значит, либо на одной прямой лежат какие-то три из них, не умаляя общности B, C, D, либо никакие три из этих точек на одной прямой не лежат. В любом случае прямые AB, AC, AD попарно различны, однако они все касаются окружности ω и проходят через точку A, противоречие.

11.2. Тройку положительных чисел (a, b, c) назовём *загадочной*, если

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2c^2} + 2ab} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2a^2} + 2bc} + \\ + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca} = 2(a + b + c).$$

Докажите, что если тройка (a, b, c) — загадочная, то тройка (c, b, a) — тоже загадочная. (*А. Кузнецов, К. Сухов*)

Решение. Покажем, что тройка (a, b, c) — загадочная в том и только в том случае, когда $abc = 1$, из этого немедленно последует требуемое в задаче. Предположим, что $abc < 1$. Тогда $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2c^2} + 2ab} > \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = a + b$, аналогично

$\sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2a^2} + 2bc} > b + c$ и $\sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca} > c + a$. Итого, в этом случае левая часть равенства из условия больше правой. Рассуждая аналогично, в случае $abc > 1$ имеем, что правая часть больше левой, а в случае $abc = 1$ достигается равенство, что и требовалось.

11.3. Юрий подошёл к великой таблице майя. В таблице 200 столбцов и 2^{200} строк. Юрий знает, что в каждой клетке таблицы изображено солнце или луна, и любые две строки отличаются (хотя бы в одном столбце). Каждая клетка таблицы закрыта листом. Поднялся ветер и сдул некоторые листы: по два листа с каждой строки. Могло ли так случиться, что теперь Юрий хотя бы про 10 000 строк может узнать, что в каждой из них изображено в каждом из столбцов? (*И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. Могло.

Решение. Заметим, что существует всего 2^{200} различных строк длины 200, в которых каждый символ — солнце или луна; значит, каждая такая строка встречается в таблице ровно один раз. Разобьём все позиции на две половины по 100 столбцов — «левую» и «правую». Предположим, что в каждой строке, в которой есть два солнца в одной половине (назовём их *солнечными*), ветер сдул листья с одной из таких пар солнц, а в каждой несолнечной строке — таких строк ровно 101^2 — ветер обнаружил положения всех солнц (в несолнечной строке не более двух солнц, так что ветер мог так поступить). Тогда Юрий* сообразит, что те строки, где открыты два солнца в одной половине — точно солнечные, а значит, несолнечные строки — это в точности те 101^2 строк, в которых ветер не открывал два солнца в одной половине. У каждой из них открыты все солнца, так что закрытые листьями изображения в этих строках — луна.

Замечание. Существуют и принципиально другие конструкции, также позволяющие определить 101^2 строк. Приведём одну из них.

Скажем, что строка *монолитная*, если все солнца в ней сто-

*Юрий Валентинович Кнорозов (1922–1999) — советский и российский учёный, дешифровавший письменность майя.

ят подряд (строка из одних лун также монолитна). Монолитную строку назовём *сбалансированной*, если хотя бы один из двух средних символов — солнце, либо если солнц нет вообще. Сбалансированных строк ровно 101^2. Любая несбалансированная строка содержит либо солнце, стоящее слева от луны в левой половине, либо луну, стоящую слева от солнца в правой; сбалансированная же строка таких пар не содержит. Пусть ветер откроет именно такую пару символов в каждой несбалансированной строке; тогда Юрий узнает множество всех сбалансированных строк. Далее, в каждой сбалансированной строке, содержащей хотя бы два солнца, ветер откроет самое левое и самое правое из них; можно показать, что тогда все эти строки также однозначно определятся. Наконец, в оставшихся трёх сбалансированных строках ветер откроет два средних символа, позволяя определить и эти строки.

11.4. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность ω. Через вершину A проведена прямая $\ell_a \parallel BC$, через вершину B — прямая $\ell_b \parallel CD$, через вершину C — прямая $\ell_c \parallel DA$, через вершину D — прямая $\ell_d \parallel AB$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на этих четырёх прямых (именно в этом порядке), вписан в окружность γ. Окружности ω и γ пересекаются в точках E и F. Докажите, что прямые AC, BD и EF пересекаются в одной точке.

(*А. Кузнецов*)

Первое решение. Без ограничения общности можно считать, что лучи AB и DC; CB и DA пересекаются. Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке G, а также $A'B'C'D'$ — четырёхугольник, образованный прямыми ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, ℓ_d (см. рис. 8). Также обозначим через X пересечение AB и CD', через Y — пересечение CD и AB'.

Пусть $\angle B'AB = \alpha$. Из вписанности четырёхугольника $A'B'C'D'$ и условий $AX \parallel \ell_d$, $CY \parallel \ell_b$ имеем: $\alpha = \angle B'AX = 180^\circ - \angle A'B'C' = \angle C'D'X = \angle YCA'$. Значит, во-первых, точки A, D', X, C' лежат на одной окружности, обозначим её γ_1; во-вторых, точки C, Y, A', B' лежат на одной окружности, обозначим её γ_2; в-третьих, точки A, X, C, Y лежат на одной окружности, обозначим её γ_0. Заметим, что точка B — радикаль-

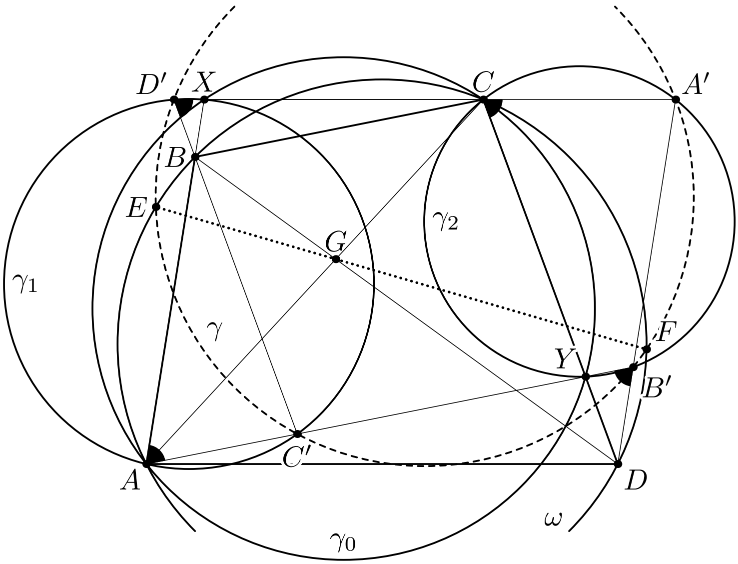

Рис. 8

ный центр окружностей γ, γ_0, γ_1 (поскольку она лежит на прямых AX и $C'D'$); точка D — радикальный центр окружностей γ, γ_0, γ_2 (так как она лежит на прямых CY и $A'B'$). Таким образом, BD — радикальная ось окружностей γ_0 и γ; AC — радикальная ось окружностей γ_0 и ω; EF — радикальная ось окружностей ω и γ, поэтому эти три прямые пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

Второе решение. Введём обозначения как в первом решении. Для точки плоскости P обозначим через $f(P)$ разность степеней точки P относительно окружностей ω и γ. Поскольку EF — радикальная ось окружностей ω и γ, то достаточно доказать, что $f(G) = 0$. Кроме того, легко видеть, что $f(A) = -AC' \cdot AB'$ и $f(C) = CD' \cdot CA'$ (см. рис. 9).

Заметим, что функция f — линейная, то есть для точки P на отрезке QR выполнено равенство $f(P) = \dfrac{PR \cdot f(Q) + PQ \cdot f(R)}{QR}$ $(\star)$. Мы докажем это утверждение позднее. Пока, применив его для точек A, G, C, мы получим, что $f(G) = \dfrac{AG \cdot f(C) + CG \cdot f(A)}{AC}$.

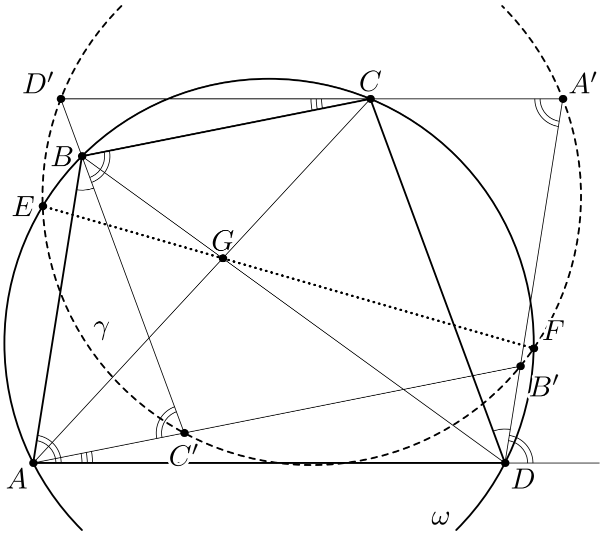

Рис. 9

Таким образом, достаточно доказать, что $-\dfrac{f(A)}{f(C)} = \dfrac{AG}{CG}(\star\star)$.

Заметим, что $\dfrac{AG}{GC} = \dfrac{d(A,BD)}{d(C,BD)} = \dfrac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \dfrac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}$ (последнее равенство следует из того, что $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$; через $d(P,\ell)$ мы обозначаем расстояние от точки D до прямой ℓ). Следовательно, равенство $(\star\star)$ переписывается в виде: $\dfrac{AC'\cdot AB'}{CD'\cdot CA'} = \dfrac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}$.

Из вписанности четырёхугольника $ABCD$ и данных в условии параллельностей прямых следуют равенства углов: $\angle CA'D = 180^\circ - \angle ADB' = \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = \angle CBC' = \angle AC'B$; $\angle ABC' = \angle CDA'$ и $\angle BCD' = \angle B'AD$. Таким образом, $\triangle ABC'$ и $\triangle CDA'$, а также $\triangle DAB'$ и $\triangle BCD'$ подобны по двум углам. Из подобия получаем равенства отношений $\dfrac{AC'}{CA'} = \dfrac{AB}{CD}$ и $\dfrac{AB'}{CD'} = \dfrac{AD}{BC}$, остаётся лишь перемножить эти равенства.

Вернёмся к доказательству линейности функции f. Введём декартовы координаты таким образом, чтобы центры окружностей ω и γ лежали на оси абсцисс, пусть их координаты будут $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, а радиусы окружностей — R_1 и R_2. Тогда для произвольной точки P с координатами (x, y) по определению степени точки мы получаем, что $f(P) = (x - x_1)^2 + y^2 - R_1^2 - (x - x_2)^2 - y^2 + R_2^2 = ax + b$, где a и b — две константы. Если точка P лежит на отрезке QR и x_q, x_r — координаты точек Q и R по оси абсцисс, то $x = \dfrac{PR \cdot x_q + PQ \cdot x_r}{QR}$, откуда немедленно следует $(\star)$.

Замечание 1. Линейная функция в произвольным образом введённых декартовых координатах имеет вид $f(x, y) = ax + by + c$. Если она отлична от константы, то решением уравнения $f(x, y) = 0$ будет прямая. Например, таким образом (рассуждая как в приведённом решении) доказывается, что радикальная ось двух окружностей — это прямая, перпендикулярная линии центров.

Замечание 2. Приведём план решения задачи с помощью комплексных чисел. Пусть окружность ω — стандартная единичная, координаты точек A, B, C, D обозначаются соответственно a, b, c, d. Рассмотрим прямые (точнее, уравнения прямых) $\ell_{ac}(z) = ac\bar{z} + z - a - c$, $\ell_{bd}(z) = bd\bar{z} + z - b - d$ — это соответствующие диагонали AC, BD. Прямая ℓ_a через точку A параллельно BC имеет уравнение $\ell_a(z) = bc\bar{z} + z - bc/a - a$, аналогично три другие прямые из условия. Окружность γ, проходящая через точки их пересечения, имеет уравнение $F(z) := \ell_a(z)\ell_c(z) - \ell_b(z)\ell_d(z)$: с одной стороны, точки пересечения удовлетворяют условию $F = 0$, с другой стороны, коэффициенты при z^2 и $\bar{z}^2$ сокращаются, так что это именно окружность. Радикальная ось окружностей γ и ω имеет уравнение $\ell_{ef}(z) := F(z) - T(z\bar{z} - 1)$, где T — подходящий коэффициент, чтобы получилась прямая (он нам не будет важен в дальнейшем). Докажем, что для некоторых коэффициентов τ, θ имеет место тождество $\ell_{ef}(z) + \tau\ell_{ac}(z) + \theta\ell_{bd}(z) = 0$ (A), из этого будет следовать требуемое. Тождество (A) достаточно проверять, когда z — одна из вершин четырёхугольника $ABCD$, потому что на одной прямой они не лежат. Подставляя, например, $z = a$, получаем тождество $0 = F(a) + \theta\ell_{bd}(a) = -\ell_b(a)\ell_d(a) + \theta\ell_{bd}(a)$. Это даёт значение θ, и оно должно быть согласовано со значением, которое получается для $z = c$, то есть должно выполняться тождество $\ell_b(a)\ell_d(a)/\ell_{bd}(a) = \ell_b(c)\ell_d(c)/\ell_{bd}(c)$, и второе аналогичное. Все эти значения считаются непосредственно (и раскладываются на множители, например, $\ell_{bd}(a) = bd/a+a-b-d = (a-b)(a-d)/d$), после чего не составляет труда доказать нужное тождество.

11.5. Квартал представляет собой клетчатый квадрат 10×10. В новогоднюю ночь внезапно впервые пошёл снег, и с тех пор каждую ночь на каждую клетку выпадало ровно по 10 см снега; снег падал только по ночам. Каждое утро дворник выбирает один ряд (строку или столбец) и сгребает весь снег оттуда на один из соседних рядов (с каждой клетки — на соседнюю по стороне). Например, он может выбрать седьмой столбец и из каждой его клетки сгрести весь снег в клетку слева от неё. Сгребать снег за пределы квартала нельзя. Вечером сотого дня года в город приедет инспектор и найдёт клетку, на которой лежит сугроб наибольшей высоты. Цель дворника — добиться, чтобы эта высота была минимальна. Сугроб какой высоты найдёт инспектор?

(*А. Солынин*)

Ответ. 1120 см.

Решение. Будем измерять высоту сугроба в дециметрах. Также будем считать, что сторона одной клетки равна 1 дм, то есть за каждую ночь на клетку выпадает 1 дм^3 снега.

Докажем, что после сотого утра найдется сугроб высотой не менее 112 дм. Предположим, что такого сугроба нет. Так как дворник в сотое утро полностью сгрёб снег с какого-то ряда, в десяти клетках квадрата снега нет. В каждой из оставшихся 90 клеток, по нашему предположению, не более 111 дм^3 снега, то есть всего снега не больше, чем 9990 дм^3. Однако за 100 ночей суммарно выпало 10 000 дм^3 снега. Противоречие.

Покажем, как может действовать дворник, чтобы после сотого утра каждый сугроб имел высоту не более 112 дм (то есть в каждой клетке было не более 112 дм^3 снега).

Способ 1. Первые 11 дней дворник сгребает снег из второго столбца в первый, следующие 11 дней дворник сгребает снег из третьего столбца во второй, затем 11 дней из четвёртого в третий, и т. д. Через 99 дней в десятом столбце не будет снега. Посчитаем, сколько снега стало в столбце $i \leqslant 9$ через 99 дней. Вечером $11(i-1)$-го дня в столбце номер i не было снега, а в столбце $i+1$ в каждой клетке было по $11(i-1)$ дм^3 снега. На следующий вечер в столбце i станет по $11(i-1)+2$ дм^3 снега в каждой клетке. Затем ещё десять дней количество снега в каждой клетке i-го столбца будет увеличиваться на 2, а затем $11(9-i)$ дней — на 1. Итого, через 99 дней в каждой клетке столбца i будет по $11(i-1)+22+11(9-i)=110$ дм^3 снега. В сотую ночь выпадет ещё по 1 дм^3 в каждую клетку. А сотым утром дворник сгребет снег из десятого столбца в девятый. Таким образом, в каждой клетке будет не более 112 дм^3 снега.

Способ 2. Пусть дворник сгребёт снег из 2-го столбца в 1-ый, из 3-го во 2-й, ..., из 10-го в 9-ый. Тогда вечером девятого дня в первых девяти столбцах будет по 10 дм^3 снега в каждой клетке, а в десятом столбце снега не будем. Затем дворник проделывает аналогичный процесс в обратном порядке: из 9-го в 10-ый, из 8-го в 9-ый, ..., из 2-го в первой. Тогда вечером 18-го дня в клетках последних девяти столбцов будет по 20 дм^3 снега, а в первом столбце не будет снега. Аналогично повторим такие сдвиги (каждый длится 9 дней) ещё 9 раз, и через 99 дней получим в клетках девяти столбцов по 110 дм^3 снега и один крайний столбец пустой. Сотым утром сгребаем снег из этого крайнего в соседний и получаем не более 112 дм^3 снега в каждой клетке.

11.6. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром в точке O, его высоты пересекаются в точке H. Через точку O проведена прямая, перпендикулярная AH, а через точку H — прямая, перпендикулярная AO. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами AB и AC лежат на одной окружности, которая касается окружности ω. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая AH повторно пересекает окружность ω в точке D (см. рис. 10). Тогда прямая, проведённая по условию через O — серединный перпендикуляр к хорде AD, пусть она пересекает стороны AB и AC в точках X и Y, а прямая через H из условия задачи пересекает их в точках Z и T. Поскольку $XY \parallel AC$, то окружность (AXY) касается окружности ω в точке A. При симметрии относительно XY окружность

ω переходит в себя, а окружность (AXY) переходит в окружность (DXY), тогда она тоже касается окружности ω.

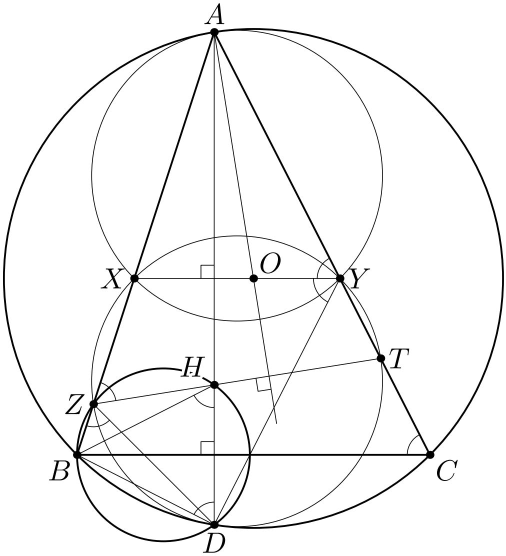

Рис. 10

Поскольку $ZH \perp AO$, то $\angle AZH = 90^\circ - \angle OAB = \angle ACB = \angle ADB$. Следовательно, четырёхугольник $BZHD$ — вписанный. Тогда $\angle BZD = \angle BHD = 90^\circ - \angle HCB = \angle ACB$. Значит, в силу сказанного выше, $\angle XYD = \angle AYX = \angle ACB = \angle BZD$, поэтому точка Z лежит на окружности (DXY). Аналогично, на этой окружности лежит и точка T, откуда и следует требуемое.

Замечание. Можно рассуждать несколько иначе: установить (похожими равенствами углов), что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности, а также что окружности (DXY) и (DZT) касаются окружности ω в точке D. Однако эти три окружности не могут быть различными, поскольку в таком случае их радикальные оси не пересекаются в одной точке, в чём нетрудно убедиться. Значит, все эти окружности совпадают, что нам и требовалось.

11.7. В стране $n > 100$ городов и пока нет дорог. Правительство наугад определяет стоимость строительства дороги (с двусторонним движением) между каждыми двумя городами, используя по разу все суммы от 1 до $n(n-1)/2$ талеров (все варианты равновероятны). Мэр каждого города выбирает самую дешёвую из $n-1$ возможных дорог, идущих из этого города, и она строится (это может быть взаимным желанием мэров обоих соединяемых городов или только одного из двух).

После строительства этих дорог города оказываются разбиты на M компонент связности (между городами одной компоненты связности можно добраться по построенным дорогам, возможно, с пересадками, а между городами разных компонент — нельзя). Найдите математическое ожидание случайной величины M. (*Ф. Петров*)

Ответ. $\dfrac{n(n-1)}{2(2n-3)}$.

Решение. Дорогу, которую хотят строить сразу два мэра, назовём *надёжной*. Рассмотрим в каждой компоненте самую дешёвую дорогу AB. Тогда она является надёжной. Предположим, что в этой компоненте есть ещё одна надёжная дорога CD (ясно, что города C, D отличны от A, B) и рассмотрим путь по дорогам от одного из городов A, B до одного из городов C, D — не умаляя общности, он имеет вид $AX_1X_2\ldots X_kC$ (города X_1, $\ldots$, X_k отличны от A, B, C, D, возможно, $k=0$). Тогда дорогу AX_1 хочет строить мэр города X_1 (мэр города A хочет строить AB), дорогу X_1X_2 — мэр города X_2 (мэр города X_1 хочет строить X_1A) и так далее, мэр города C хочет строить дорогу CX_k, а не CD — противоречие.

Итак, в каждой компоненте есть ровно одна надёжная дорога. Для каждой из $n(n-1)/2$ пар городов A, B рассмотрим случайную величину ξ_{AB}, которая равна 1, если AB — надёжная дорога, и 0 в противном случае. Из доказанного следует, что M есть сумма ξ_{AB} по всем $n(n-1)/2$ парам $\{A, B\}$. Для данных A, B событие $\xi_{AB}=1$ означает, что дорога AB — самая дешёвая из $2n-3$ дорог, выходящих из A или B, так что вероятность такого события равна $1/(2n-3)$ (из симметричности распределения цен эти дороги равноправны, так что каждая из них является самой дешёвой с вероятностью $1/(2n-3)$). Значит, математическое ожидание ξ_{AB} равно $1/(2n-3)$, а математическое ожидание случайной величины M равно сумме этих математических ожиданий по всем парам, то есть $\dfrac{n(n-1)}{2(2n-3)}$.

11.8. Докажите, что существует такое $c > 0$, что для любого нечётного простого $p = 2k+1$ числа 1^0, 2^1, 3^2, $\ldots$, k^{k-1} дают хотя бы $c\sqrt{p}$ различных остатков при делении на p.

(*М. Туревский, И. Богданов*)

Решение. Все сравнения в этом решении производятся по модулю p. Если a и b — целые числа, причём b не делится на p, то через a/b мы обозначаем тот единственный остаток c по модулю p, для которого $a \equiv bc$.

Пусть числа 1^0, 2^1, 3^2, $\ldots$, k^{k-1} дают ровно d различных остатков при делении на p. Обозначим $t = [p/4]$. Тогда выражения вида $f(a) = (2a)^{2a-1}/(a^{a-1})^2 = 2^{2a-1}a$ при $1 \leqslant a \leqslant t$ дают максимум d^2 различных остатков.

Назовём пару натуральных чисел (a, b) таких, что $1 \leqslant a < b \leqslant t$, *исключительной*, если $f(a) \equiv f(b)$. Покажем, что для каждого $\delta = 1, 2, \ldots, t-1$ существует не более одной исключительной пары (a, b), в которой $b - a = \delta$. Действительно, если (a, b) — такая пара, то из $2^{2a-1}a = 2^{2b-1}b$ вытекает, что $a/b \equiv 2^{2\delta}$, откуда $b = a + \delta \equiv 2^{2\delta}b + \delta$, или $b(1 - 2^{2\delta}) \equiv \delta$. Такой остаток b не более чем единственен (поскольку $\delta \neq 0$), а по нему восстанавливается a.

Итого, существует не более чем $t-1$ исключительная пара; обозначим их количество через S. Пусть числа $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(t)$ дают ровно ℓ различных остатков по модулю p, встречающихся a_1, a_2, $\ldots$, a_ℓ раз соответственно. Тогда $\sum_{i=1}^{\ell} a_i = t$ и $S = \sum_{i=1}^{\ell} C_{a_i}^2$. Верна следующая цепочка неравенств:

$$t - 1 \geqslant S = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i^2 - \sum_{i=1}^{\ell} a_i\right) \geqslant \frac{t^2/\ell - t}{2},$$

откуда $\ell \geqslant t^2/(3t-2) > t/3$. Вспоминая, что $\ell \leqslant d^2$, получаем оценку $d > \sqrt{t/3} \geqslant [\sqrt{p/12}]$.

Таким образом, в качестве искомой константы c можно взять, например, число $1/24$: для простых $p < 12$ неравенство $d > \dfrac{\sqrt{p}}{24}$ тривиально, а для $p > 12$ следует из неравенства $[x] \geqslant x/2$ при $x > 1$.