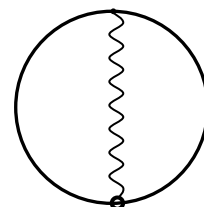


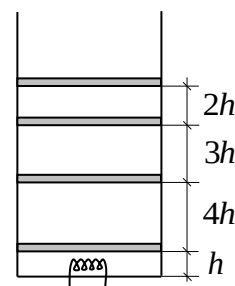
**Решения и критерии оценивания решений задач**  
**Заключительного тура олимпиады «Росатом», 2021-2022 учебный год,**  
**физика, 11 класс**

1. Во льду сделали очень длинный прямой желоб и на равных расстояниях  $l = 40$  см расположили цепочкой одинаковые тела. Первому телу цепочки сообщили скорость  $v_0 = 1,3$  м/с в направлении всех остальных тел. Сколько тел сдвинется с места, если коэффициент трения между телами и льдом равен  $\mu = 0,02$ ? Столкновения тел абсолютно упругие, размеры тел очень малы. Считать, что количество тел в цепочке очень велико, и  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Ответ обосновать.

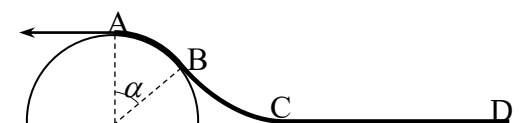
2. Из проволоки сделали кольцо радиуса  $R$ , расположили в вертикальной плоскости и закрепили в таком положении. К верхней точке кольца прикреплен один конец невесомой пружины. Второй конец пружины прикреплен к массивной бусинке, которая может без трения скользить по кольцу. Если поместить бусинку в нижнюю точку кольца (см. рисунок), она давит на кольцо с силой вдвое превышающей силу ее притяжения к земле. Из-за небольшого смещения бусинка начинает скользить по кольцу, причем ее скорость достигает максимума, когда она проходит по кольцу шестую часть его полной длины. Найти длину пружины в недеформированном состоянии.



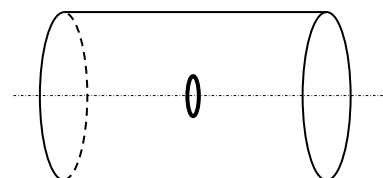
3. В открытом вертикальном цилиндрическом сосуде с одноатомным идеальным газом находятся четыре одинаковых тонких массивных подвижных поршня массой  $m$  каждый. Расстояния между поршнями и между нижним поршнем и дном сосуда равны  $h$ ,  $2h$ ,  $3h$  и  $4h$  (см. рисунок). В некоторый момент времени включается нагреватель, расположенный между дном сосуда и нижним поршнем, и медленно сообщает газу количество теплоты  $Q$ . На сколько сместится верхний поршень, если поршни (за исключением верхнего) проводят тепло, стенки сосуда и верхний поршень тепло не проводят, теплоемкостью сосуда и поршней можно пренебречь. Атмосферное давление отсутствует.



4. Однородную нерастяжимую веревку, лежащую на горизонтальной поверхности, медленно втягивают на гладкий полушар, закрепленный на поверхности, действуя на ее конец некоторой силой. Когда конец веревки А оказывается в верхней точке полушара, веревка касается полушара участком АВ, опирающимся на угол  $\alpha$ , а длина «висящего» участка веревки ВС втрое меньше ее участка CD, лежащего на поверхности (см. рисунок). Найти коэффициент трения между веревкой и поверхностью. Какой горизонтальной силой нужно в этот момент действовать на конец веревки А, если масса веревки  $m$ , масса куска CD -  $m_{CD}$ ?



5. Из гибкого диэлектрика изготовили длинный тонкостенный цилиндр радиуса  $R$  и равномерно зарядили его положительным зарядом с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Внутри цилиндра перпендикулярно его оси вставили диэлектрическое колечко радиуса  $r$  и массой  $m$ , центр которого совпадает с осью цилиндра и которое заряжено положительным зарядом с линейной



плотностью заряда  $\lambda$ . Цилиндр раскручивают до угловой скорости  $\omega$ . Найти угловую скорость колечка.

## Решения

1. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что при центральных упругих столкновениях тел одинаковых масс тела обмениваются скоростями. В частности, если тело, движущееся со скоростью  $V$ , налетает на покоящееся тело той же массы, то после центрального упругого столкновения первое тело остановится, а второе будет двигаться со скоростью  $v$ . Это значит, что картина движения наших тел является такой.

Сначала движется первое тело, и его движение до столкновения со вторым телом замедляется силой трения.

После столкновения со вторым, первое останавливается, а второе будет двигаться с его предыдущей скоростью. До столкновения с третьим телом сила трения уменьшит его скорость.

После столкновения с третьим телом второе остановится, а третье будет двигаться с его скоростью.

И т.д.

Таким образом, в каждый момент времени в системе тел движется только одно тело, причем с такой скоростью, до какой сила трения успела затормозить движение тел. Расстояние, на котором это движение полностью прекратится, легко найти с использованием теоремы об изменении кинетической. Поскольку тела точечные и при каждом ударе предыдущее тело передает свою скорость последующему, то, несмотря на то, что сила трения тормозит разные тела, торможение движения силой трения происходит так, как будто движется одно тело. Поэтому теорема об изменении кинетической энергии дает для полного торможения

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgS$$

где  $m$  - масса тел,  $v_0$  - начальная скорость первого тела,  $\mu$  - коэффициент трения между телом и желобом,  $S$  - расстояние от точки, в которой начало движение первое тело, до точки остановки последнего. Отсюда находим, что движение остановится на расстоянии

$$S = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

от начальной точки. А поскольку расстояние между всеми телами  $l$ , то в движение будут вовлечены следующее количество тел

$$n = \left[ \frac{S}{l} \right] = \left[ \frac{v_0^2}{2\mu gl} \right]$$

где  $[...]$  - целая часть. Или

$$n = 10$$

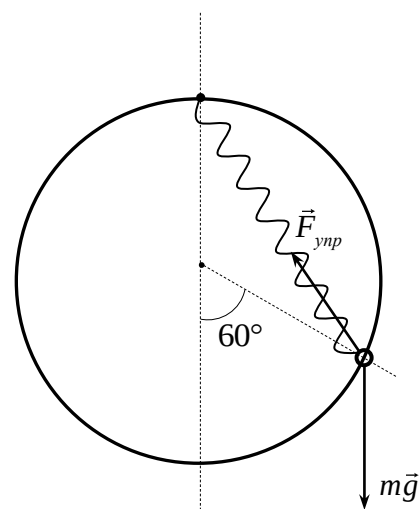
**Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

1. Обосновано, что при центральном упругом столкновении тел одинаковой массы они меняются скоростями - 0,5 балла
  2. Правильно найден тормозной путь одного тела – 0,5 балла
  3. Правильная идея решения – суммарный путь, пройденный всеми телами, равен тормозному пути одного тела – 0,5 балла
  4. Правильный ответ – 0,5 балла
- Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

2. Пусть коэффициент жесткости пружины равен  $k$ , длина в недеформированном состоянии  $l_0$ . Очевидно, в начальном положении растянута, и сила упругости равна  $F_{\text{упр}} = 3mg$  (чтобы обеспечить давление бусинки на кольцо с силой, вдвое превышающей ее силу тяжести). Поэтому

$$k(2R - l_0) = 3mg \quad (1)$$

С другой стороны, движение бусинки вдоль кольца определяется составляющими сил упругости и тяжести, направленными вдоль касательной к кольцу, причем вначале составляющая силы упругости разгоняет, а составляющая силы тяжести – тормозит движение бусинки. Поэтому скорость движения бусинки по кольцу достигнет максимума, когда составляющая силы упругости сравняется с составляющей силы тяжести (см. рисунок). По условию это произойдет, когда бусинка пройдет третью часть полукольца, т.е. направление на бусинку составит угол  $60^\circ$  с вертикалью (см. рисунок). Находя соответствующие проекции, получим для этого положения



$$F_{\text{упр}} \cos 60^\circ = mg \cos 30^\circ$$

причем длина пружины в этом положении будет равна  $2R \cos 30^\circ$ . Поэтому условие максимальности скорости бусинки дает

$$k \left( 2R \frac{\sqrt{3}}{2} - l_0 \right) \frac{1}{2} = mg \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Деля уравнение (1) на уравнение (2) и решая полученное уравнение, найдем длину пружины в недеформированном состоянии  $l_0$ :

$$l_0 = \frac{R}{\sqrt{3} - 1} = 1,37R$$

**Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

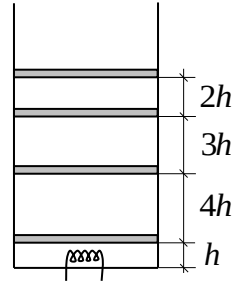
1. Правильно использован закон Гука - 0,5 балла
  2. Правильно найдена (из сравнения проекций сил упругости и тяжести или по закону сохранения энергии) точка кольца, где скорость бусинки максимальна – 0,5 балла
  3. Правильное условие максимальности скорости бусинки – 0,5 балла
  4. Правильный ответ – 0,5 балла
- Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

3. Поскольку тепло подводится медленно, поршни в любой момент времени находятся в равновесии. Поэтому давление газа в каждом отсеке остается неизменным в течение всего процесса. Это значит, что с газом в отсеках сосуда происходит изобарический процесс при давлениях, которые определяются условиями равновесия поршней:

$$p_1 = \frac{mg}{S} = p, \quad p_2 = \frac{2mg}{S} = 2p, \quad p_3 = \frac{3mg}{S} = 3p, \quad p_4 = \frac{4mg}{S} = 4p \quad (1)$$

где  $p_1, p_2, p_3$  и  $p_4$  - давления газа в отсеках сосуда, начиная с верхнего,  $m$  - масса поршня.

Поскольку процесс, происходящий с газом в отсеках сосуда, - изобарический, а температура газа в отсеках меняется одинаково, то отношение объемов газов при их расширении сохранится. Это значит, что отношение объемов отсеков сосуда (начиная с верхнего) будет таким же, как и до нагревания



$$V'_1 : V'_2 : V'_3 : V'_4 = 2 : 3 : 4 : 1$$

Здесь  $V'_1, V'_2, V'_3, V'_4$  - объемы отсеков сосуда (начиная с верхнего) после нагревания. А это в свою очередь означает, что так же относятся и изменения объемов отсеков сосуда

$$\Delta V_1 : \Delta V_2 : \Delta V_3 : \Delta V_4 = 2 : 3 : 4 : 1$$

Поэтому если нижний поршень сместится при нагревании вверх на величину  $\Delta x$ , то второй снизу сместится на  $5\Delta x$ , третий снизу - на  $8\Delta x$ , верхний - на  $10\Delta x$ :

$$\Delta x_1 = 10\Delta x, \quad \Delta x_2 = 8\Delta x, \quad \Delta x_3 = 5\Delta x, \quad \Delta x_4 = \Delta x \quad (2)$$

Используем теперь первый закон термодинамики. Поскольку процессы, происходящие с газом - изобарические, то количество теплоты, которое сообщается газу при его расширении на  $\Delta V$  есть  $Q = (5/2)p\Delta V$ , то для указанного изменения их объемов необходимо следующее количество теплоты

$$Q = \frac{5}{2}(p_1\Delta V_1 + p_2\Delta V_2 + p_3\Delta V_3 + p_4\Delta V_4)$$

Используя теперь формулы (1) и (2), получим

$$Q = \frac{5}{2}p(\Delta V_1 + 2\Delta V_2 + 3\Delta V_3 + 4\Delta V_4) = \frac{5}{2}pS(2\Delta x + 6\Delta x + 12\Delta x + 4\Delta x)$$

( $S$  - площадь сечения сосуда). Отсюда находим величину  $\Delta x$

$$\Delta x = \frac{Q}{60mg},$$

а затем и смещение верхнего поршня

$$\Delta x_{\text{верх}} = \frac{Q}{6mg}$$

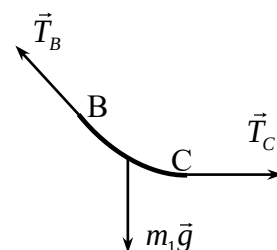
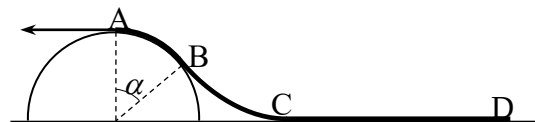
**Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

- 1. Понято, что процесс, происходящий с газом – изобарический, и потому отношение изменений объемов отсеков при нагревании равно отношению первоначальных объемов - 0,5 балла**
- 2. Правильно найдены смещения всех поршней – 0,5 балла**
- 3. Правильное использование первого закона термодинамики для процесса в каждом отсеке – 0,5 балла**
- 4. Правильный ответ для смещения верхнего поршня – 0,5 балла**

**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

- 4.** Поскольку веревку втягивают медленно, в каждый момент  $t$  времени сумма сил, действующих на нее (и на любую ее часть) равна нулю, но сила трения равна своему максимальному значению.

Рассмотрим условие равенства нулю сил, действующих на «висящий» кусок веревки BC. На него действуют: сила тяжести  $m_1 \vec{g}$  ( $m_1$  - масса куска веревки BC), сила натяжения в точке B  $\vec{T}_B$  и сила натяжения в точке C  $\vec{T}_C$  (см. рисунок). Условие равенства нулю суммы сил в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси дает



$$\begin{aligned} T_B \sin \alpha &= m_1 g \\ T_B \cos \alpha &= T_C \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда находим

$$T_C = m_1 g \operatorname{ctg} \alpha \quad (2)$$

На лежащий конец веревки CD действуют сила натяжения в точке C (по величине такая же как (2), но противоположно направленная), сила тяжести  $m_2 \vec{g}$  ( $m_2$  - масса куска веревки CD), сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , причем величина последней силы равна своему максимальному значению  $\mu N$ . Условие равенства нулю суммы сил, действующих на кусок CD в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси дает

$$\begin{aligned} N &= m_2 g \\ T_C &= \mu N \end{aligned}$$

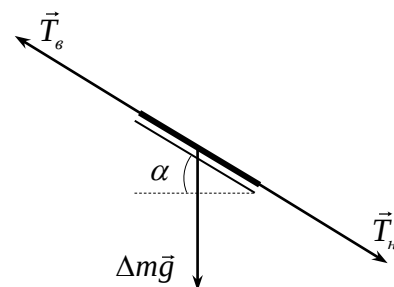
Отсюда и формулы (1) находим

$$m_1 \operatorname{ctg} \alpha = \mu m_2$$

или

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \alpha$$

Чтобы найти силу, с которой в этот момент действовать на точку A рассмотрим условие равенства нулю всех сил, действующих на участок AB. Поскольку различные элементы этого участка по-разному взаимодействуют с полушаром, разобьем этот участок на малые элементы, запишем условие



равенства нулю сил, действующих на каждый элемент. Для элемента, лежащего на кусочке полушара, наклоненном под углом  $\varphi$  в проекциях на ось, направленную вдоль элемента, получим

$$T_{\text{с}} - T_{\text{н}} = \Delta m g \sin \alpha$$

(где  $\Delta m$  - масса этого элемента,  $T_{\text{с}}$  и  $T_{\text{н}}$  - силы натяжения сверху и снизу рассматриваемого элемента. Если просуммировать такие соотношения для всех элементов участка веревки, лежащего на полушаре, сократятся все силы, кроме искомой силы  $F$  в точке А и силы натяжения в точке В. Сумму величин  $\Delta m g \sin \alpha$  для всех элементов веревки можно вычислить так. Массу элемента можно представить как  $\Delta m = \lambda \Delta l$ , где  $\lambda$  - линейная плотность веревки. А сумма величин  $\Delta l \sin \alpha$  есть проекция участка АВ на вертикальное направление. Поэтому эта сумма есть

$$R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha)$$

Поэтому условие равенства нулю суммы сил, действующих на элемент АВ дает

$$F = T_{\text{В}} + \lambda R g (1 - \cos \alpha)$$

Линейную плотность веревки  $\lambda$  можно выразить через массу веревки, лежащей на полушаре

$$m_{\text{AB}} = \lambda \alpha R$$

( $\alpha$  задан в радианах). Отсюда находим

$$F = T_{\text{В}} + \frac{m_{\text{AB}} g (1 - \cos \alpha)}{\alpha}$$

С другой стороны, из формул (1)-(2) получаем

$$T_{\text{В}} = \frac{1}{3} \frac{m_{\text{CD}} g}{\cos \alpha}$$

А массу участка АВ найдем как

$$m_{\text{AB}} = m - m_{\text{CD}} - m_{\text{BC}} = m - m_{\text{CD}} - \frac{1}{3} m_{\text{CD}} = \frac{3m - 4m_{\text{CD}}}{3}$$

Отсюда получаем окончательно

$$F = \frac{1}{3} \frac{m_{\text{CD}} g}{\sin \alpha} + \frac{(3m - 4m_{\text{CD}}) g (1 - \cos \alpha)}{3\alpha}$$

**Критерии оценивания задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

- 1. Правильное условие равновесия куска веревки ВС - 0,5 балла**
- 2. Правильно найдена сила натяжения веревки в точке В – 0,5 балла**
- 3. Правильное условие равновесия куска веревки на полушаре – 0,5 балла**
- 4. Правильный ответ для силы, с которой нужно действовать на конец веревки, находящийся в верхней точке полушара – 0,5 балла**

**Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям**

5. Заряды, распределенные по диэлектрику, будут двигаться по окружностям. Это приведет к возникновению внутри цилиндра магнитного поля. Это поле можно найти, используя аналогию между вращающимся заряженным цилиндром и током в соленоиде. Как известно, внутри соленоида, по ко-

тому течет ток  $I$ , создается однородное магнитное поле, индукция которого направлена вдоль оси соленоида и равна по величине

$$B = \mu_0 n I$$

где  $n$  - число витков на единицу длины соленоида,  $\mu_0$  - магнитная постоянная. Произведение  $nI$  в формуле (1) имеет смысл заряда, переносимого в единицу времени через единицу длины соленоида. При вращении заряженного с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  цилиндра через единицу длины в единицу времени переносится заряд  $\sigma v = \sigma R \omega$ . Поэтому индукция магнитного поля внутри цилиндра (когда его раскрутят до угловой скорости  $\omega$ ) будет равна

$$B = \mu_0 \sigma R \omega$$

При раскручивании цилиндра магнитное поле будет меняться, и внутри цилиндра возникнет вихревое электрическое поле, которое будет действовать на заряды колечка. А поскольку колечко диэлектрическое, движение этих зарядов приведет к движению самого колечка. Найдем силы, которые действуют на заряды колечка.

Благодаря осевой симметрии магнитного поля вихревое электрическое поле также будет обладать осевой симметрией – оно будет зависеть от расстояния до оси цилиндра и направлено по касательным к окружностям, охватывающим ось цилиндра. Работа вихревого поля над единичным зарядом при его движении по такой окружности есть ЭДС индукции. Поэтому по закону электромагнитной индукции имеем

$$2\pi r E(r) = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

где  $E(r)$  - напряженность вихревого электрического поля на расстоянии  $r$  от оси цилиндра,  $\Delta B / \Delta t$  скорость изменения индукции магнитного поля внутри цилиндра. Отсюда находим

$$E(r) = \frac{1}{2} r \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \mu_0 \sigma R \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

На каждый элемент колечка с зарядом  $\Delta q$  действует следующая сила

$$\Delta F = \Delta q E(r) = \frac{1}{2} r \Delta q \mu_0 \sigma R \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

что дает следующее ускорение

$$a = \frac{\Delta F}{\Delta m} = \frac{1}{2} r \frac{\Delta q}{\Delta m} \mu_0 \sigma R \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Поскольку ускорения у всех элементов колечка будут одинаковы, таким же будет и ускорение всего колечка

$$a = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \sigma R r q}{m} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Такое ускорение у колечка будет в течение всего времени раскручивания цилиндра. Умножая ускорение на малые элементы времени, на которые можно разделить время раскручивания цилиндра,



можно найти изменение скорости колечка за это время, а складывая все эти изменения, скорость  $v_{\kappa}$ , которую приобретут точки колечка и его угловую скорость  $\omega_{\kappa}$

$$v_{\kappa} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \sigma R r q}{m} \omega, \quad \omega_{\kappa} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \sigma R q}{m} \omega$$

Согласно правилу Ленца направление индукции собственного магнитного поля колечка должно быть пропорционально направлению магнитного поля цилиндра. А поскольку заряды цилиндра и колечка – одного знака, колечко будет вращаться в сторону, противоположную направлению вращения цилиндра.

**Критерии оценивания задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)**

1. Правильно найдена индукция магнитного поля внутри вращающегося цилиндра – 0,5 балла
2. Правильно найдена напряженность вихревого электрического поля в точках колечка – 0,5 балла
3. Правильно найдено ускорение, с которым раскручивается колечко в процессе раскручивания цилиндра – 0,5 балла
4. Правильный ответ для угловой скорости колечка – 0,5 балла

Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

**Оценка работы**

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.