

ВАРИАНТ 9. ЧАСТЬ 1

1. [5 баллов] Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N – середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

а) Найдите угол ABC .

б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$. Найдите площадь треугольника ABC .

Ответ: (а) 90° ; (б) $\frac{9\sqrt{7}}{4}$.

Решение. (а) Точки P и T лежат на окружности с диаметром BD , поэтому $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$. Следовательно, треугольники ADP и DCT прямоугольные; PM и TN – их медианы. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине, $TN = CN = DN$, $PM = AM = DM$. Пусть $\angle TCD = \gamma$. Поскольку треугольник CTN равнобедренный, и $\angle CTN = \gamma$, $\angle TND = 2\gamma$ (как внешний угол $\triangle CTN$). Углы PMA и TND равны в силу параллельности прямых PM и TN . А так как треугольник AMP также равнобедренный, то $\angle PAM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle PMA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle TND = 90^\circ - \gamma$. Значит, сумма углов A и C треугольника ABC равна 90° , и его третий угол $\angle ABC$ также равен 90° .

(б) В силу сказанного выше $CD = 2NT = 5$, $AD = 2MP = 1$. Обозначим $\angle ADB = \psi$. Тогда $\angle BDC = 180^\circ - \psi$. По теореме косинусов для треугольников ABD и ACD получаем, что $AB^2 = 4 + 1 - 4\cos\psi$, $BC^2 = 25 + 4 - 20\cos(180^\circ - \psi)$. Но по теореме Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 36$, откуда следует, что $5 - 4\cos\psi + 29 + 20\cos\psi = 36$, $\cos\psi = \frac{1}{8}$. Далее находим: $\sin\psi = \sqrt{1 - \cos^2\psi} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}DA \cdot DB \sin\psi + \frac{1}{2}DC \cdot DB \sin(180^\circ - \psi) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\psi = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$.

2. [6 баллов] Решите уравнение $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$.

Ответ: 5, $\frac{2-3\sqrt{11}}{2}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем $(x+4) - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} + (6-x) = t^2$, откуда $2\sqrt{24+2x-x^2} = 10 - t^2$. Уравнение принимает вид $t + 4 = 10 - t^2$; отсюда $t^2 + t - 6 = 0$, т.е. $t = 2$ или $t = -3$. Далее рассматриваем каждый из случаев в отдельности.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x+4} = 2 + \sqrt{6-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 4 + 6 - x + 4\sqrt{6-x}, \\ -4 \leq x \leq 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{6-x} = x-3, \\ -4 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 - 4x = x^2 - 6x + 9, \\ 3 \leq x \leq 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0, \\ 3 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ или } x = 5, \\ 3 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5; \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3 &\Leftrightarrow \sqrt{x+4} + 3 = \sqrt{6-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 + 6\sqrt{x+4} + 9 = 6-x, \\ -4 \leq x \leq 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{x+4} = -7 - 2x, \\ -4 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36x + 144 = 49 + 28x + 4x^2, \\ -4 \leq x \leq -3,5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 8x - 95 = 0, \\ -4 \leq x \leq -3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm 3\sqrt{11}}{2}, \\ -4 \leq x \leq -3,5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2 - 3\sqrt{11}}{2}. \end{aligned}$$

Итак, уравнение имеет два корня: $x = \frac{2-3\sqrt{11}}{2}$ и $x = 5$.

3. [6 баллов] На плоскости Oxy уравнением $26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$ заданы координаты точки A , а уравнением $ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$ – парабола с вершиной в точке B . Найдите все значения параметра a , при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x - y = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$.

Решение. Первое уравнение можно преобразовать так:

$$\begin{aligned}(4y^2 + 4(2x - 5a)y) + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot (2x - 5a) + (2x - 5a)^2) - (2x - 5a)^2 + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2y + 2x - 5a)^2 + x^2 - 2ax + a^2 = 0 &\Leftrightarrow (2y + 2x - 5a)^2 + (x - a)^2 = 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что координаты точки $A(x_A; y_A)$ удовлетворяют равенствам $2x + 2y - 5a = 0$ и $x - a = 0$, т.е. $x_A = a$, $y_A = \frac{3a}{2}$.

Так как второе уравнение задаёт параболу, то $a \neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $y = x^2 + 2ax + (a^2 + \frac{1}{a})$. Координаты точки B следующие: $x_B = -a$, $y_B = y(-a) = \frac{1}{a}$.

Обозначим $f(x; y) = 3x - y - 4$. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x - y - 4 = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x_A; y_A)$ и $f(x_B; y_B)$ есть числа разных знаков. Последнее равносильно неравенству $f(x_A; y_A) \cdot f(x_B; y_B) < 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}a - (3a - 4)\right) \left(\frac{1}{a} - (-3a - 4)\right) < 0 &\Leftrightarrow -\left(\frac{3a}{2} - 4\right) \frac{3a^2 + 4a + 1}{a} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(3a - 8)(3a + 1)(a + 1)}{a} > 0 &\Leftrightarrow a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right).\end{aligned}$$

4. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5. \end{cases}$$

Ответ: $(1; \pm 1), (-1; \pm 1)$.

Решение. Введём новые переменные $u = x^2 + y^2$, $v = x^2y^2$. Тогда $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = u^2 - 2v$ и система принимает вид

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + v = 2, \\ u^2 + v = 5. \end{cases}$$

Из первого уравнения $v = 2 - \frac{2}{u}$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его:

$$\begin{aligned}u^2 + \left(2 - \frac{2}{u}\right) = 5 &\Leftrightarrow u^2 - 3 - \frac{2}{u} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - 3u - 2 = 0, \\ u \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (u+1)^2(u-2) = 0, \\ u \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1, \\ u = 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Так как $u > 0$, то подходит только значение $u = 2$. Значит, $v = 1$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ (2 - y^2)y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = 1.$$

Отсюда следует, что система имеет 4 решения: $(1; \pm 1), (-1; \pm 1)$.

5. [5 баллов] На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 59)$, $(59; 59)$ и $(59; 0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y = x$ или $y = 59 - x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой, параллельной любой из координатных осей.

Ответ: 370 330.

Решение. Возможны два случая.

1) Оба выбранных узла лежат на указанных в условии прямых. На каждой из них внутри квадрата лежат по 58 точек, причём повторяющихся среди них нет (точка пересечения прямых имеет нецелые координаты). Для выбора первой точки есть 116 способов, а для выбора второй – на 3 меньше (подходят все точки, кроме первой и двух точек, лежащих с первой на той же горизонтали или вертикали). При этом мы учитывали упорядоченные пары точек, поэтому каждую пару точек мы посчитали дважды. Значит, в этом случае получаем $\frac{116 \cdot 113}{2} = 6\,554$ способа.

2) Ровно один из выбранных узлов лежит на данных в условии прямых. Выберем сначала узел, лежащий на одной из прямых (116 способов). Посчитаем, сколько после этого есть способов выбрать второй узел. Всего в квадрате отмечены 58^2 узлов; из них мы должны исключить узлы на диагоналях (116 штук), а также узлы, стоящие с выбранным на одной горизонтали (56 штук с учётом исключённых ранее диагональных) или на одной вертикали (56 штук). Отсюда второй узел можно выбрать $58^2 - 116 - 112 = 3\,136$ способами, а количество способов выбрать пару узлов равно $116 \cdot 3\,136 = 363\,776$.

Подводя итоги, имеем $6\,554 + 363\,776 = 370\,330$ способов.

6. [7 баллов] Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD .

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 7$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: б) $\frac{79}{100}$.

Решение. а) Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция или прямоугольник, поэтому вокруг $ABCD$ можно описать окружность (назовём её Ω). Диагонали четырёхугольника $CODT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырёхугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180° , и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω .

Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что

$$\begin{aligned}\angle DBT &= \angle DCT \text{ (вписанные, опираются на одну дугу),} \\ \angle DCT &= \angle BDC \text{ (за счёт того, что } BD \parallel CT), \\ \angle BDC &= \angle BAC \text{ (трапеция равнобокая).}\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle ABD + \angle BAC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60° , поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABO находим, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120^\circ = 3^2 + 7^2 + 3 \cdot 7 = 79$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна $AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции S_2 находим как полупроизведение диагоналей, умноженное на синус угла между ними: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{100\sqrt{3}}{4}$. Отсюда $S_1 : S_2 = 79 : 100$.