

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?

Ответ: $n = 17$.

Решение. Преобразуем выражение

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n!(1 + n + 1 + (n+1)(n+2)) = n!(n+2)^2.$$

Так как $361 = 19^2$, и 19 – простое число, то $n!(n+2)^2$ делится на 19. Если $n!$ делится на 19, то $n \geq 19$. Если $(n+2)^2$ делится на 19, то $n+2 \geq 19$. Значит, $n \geq 17$. Осталось заметить, что при $n = 17$ выражение $n!(n+2)^2$ делится на 19^2 .

2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .

Ответ: 20.

Решение. Представим указанную в условии величину в следующем виде:

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 - 10 = 5n^2,$$

где $n > 2$. Тогда $5n^2 = N^3$, $N > 6$. Отсюда N делится на 5, то есть $N = 5k$, $k > 1$. Значит, $n^2 = 5^2 k^3$, то есть k^3 – квадрат натурального числа. Поэтому в разложении числа k все простые множители будут в четных степенях, то есть $k > 1$ – квадрат натурального числа. Наименьшее такое $k = 2^2$. Поэтому наименьшее возможное $N = 5 \cdot 2^2 = 20$. Осталось заметить, что $N = 20$ подходит.

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

Ответ: $x \in \left[3; \frac{7}{2}\right]$.

Решение. Заметим, что данное в условии неравенство имеет вид $|A + B| \geq |A| + |B|$, где $A = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1$, $B = 7 - 2x$. Данное неравенство равносильно следующему: $AB \geq 0$. При этом $A + B \geq 6$, поэтому ситуация, когда хотя бы одно из выражений A, B отрицательно, невозможна. Значит, оба выражения A, B неотрицательны. То есть неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0; \\ 7 - 2x \geq 0. \end{cases}$$

ОДЗ исходного неравенства будет множество $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Если $x \in (-\infty; -1]$, то второе неравенство системы выполняется автоматически. Перепишем первое неравенство системы в виде $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x$. Так как $1 - 2x > 0$, то неравенство можно возвести в квадрат. Получим $x^2 - 2x - 3 \geq 1 - 4x + 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 4 \leq 0$. Данное неравенство не имеет решений.

Если $x \in [3; +\infty)$, то первое неравенство системы выполняется автоматически. Из второго неравенства получаем, что $x \leq \frac{7}{2}$. И в этом случае получаем, что $x \in \left[3; \frac{7}{2}\right]$.

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

Ответ: $4 \cdot 43 \cdot 43 + 4 \cdot 42 \cdot 46 + 2 \cdot 44 \cdot 42 + 4 \cdot 47 \cdot 41 + 45 \cdot 45 = 28553$.

Решение. Заметим, что сторона ромба может либо быть параллельна одной из осей, либо быть гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, параллельными осям.

Рассмотрим левую вершину ромба (если таких две, то рассмотрим нижнюю) $O(x, y)$. Тогда смежной вершиной может быть одна из точек $A(x+3, y-4)$, $B(x+4, y-3)$, $C(x+5, y)$, $D(x+4, y+3)$, $E(x+3, y+4)$, $F(x, y+5)$.

Тройки AOB , AOD , BOE , DOE порождают ромбы "вписанные" в квадрат 7×7 . Таких квадратов в исходном поле 43×43 .

Тройки AOC , COE порождают ромбы "вписанные" в прямоугольники 8×4 . Таких прямоугольников в исходном поле 42×46 .

Тройки BOF , DOF порождают ромбы "вписанные" в прямоугольники 4×8 .

Тройка AOE порождает ромб "вписанный" в прямоугольник 6×8 . Таких прямоугольников в исходном поле 44×42 .

Тройка BOD порождает ромб "вписанный" в прямоугольник 8×6 .

Тройки AOF , EOF порождают ромбы "вписанные" в прямоугольник 3×9 . Таких прямоугольников в исходном поле 47×41 .

Тройки BOC , COD порождают ромбы "вписанные" в прямоугольник 9×3 .

Тройка COF порождает ромб "вписанный" в квадрат 5×5 . Таких квадратов в исходном поле 45×45 .

Таким образом, ответ:

$$4 \cdot 43 \cdot 43 + 4 \cdot 42 \cdot 46 + 2 \cdot 44 \cdot 42 + 4 \cdot 47 \cdot 41 + 45 \cdot 45 = 28553.$$

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

Ответ: $(8; \pm 83)$.

Решение. Заметим, что можно искать только неотрицательные значения y , так как пары чисел $(x; y)$ и $(x; -y)$ одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют уравнению. Очевидно также, что $x \geq 0$.

Перепишем уравнение в виде:

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45).$$

Заметим, что тогда $y - 45 > 0$, а $y + 45 > 90$. При $x = 0$ решений нет, а при $x > 0$ числа $y - 45$ и $y + 45$ должны быть чётными, причём ровно одно из них кратно четырём, так как разность этих чисел делится на 2, но не делится на 4. Кроме того, ровно одно из этих чисел делится на 19. Так как $19 \cdot 2^x = 19 \cdot 2 \cdot 2^{x-1}$ и $y + 45 > 90$, то возможны два варианта:

$$\begin{cases} y - 45 = 19 \cdot 2, \\ y + 45 = 2^{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8; y = 83,$$

или

$$\begin{cases} y - 45 = 2, \\ y + 45 = 19 \cdot 2^{x-1}. \end{cases}$$

В последнем случае решений нет.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.

Ответ: $a = 1$; $a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$.

Решение. Множество $x^2 + y^2 = a^2$ представляет собой точку $O(0,0)$ при $a = 0$ и окружность с центром в $O(0,0)$ и радиусом $|a|$ при $a \neq 0$.

$$x^2 - 6x + a = (x - 3)^2 - 9 + a.$$

$(x - 3)^2$ — квадрат расстояния от точки $(x; y)$ до прямой $x = 3$. Наибольшее расстояние от точек окружности равно $|a| + 3$.

$$\begin{aligned} (|a| + 3)^2 - 9 + a &= a^2 + 6|a| + a = 8; \\ a^2 + 6|a| + a - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрев два случая раскрытия модуля, получаем $a = 1$ и $a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$.

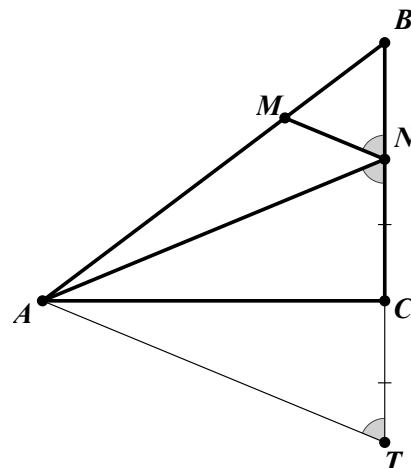
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.

Ответ: 10° .

Решение. Отметим на продолжении отрезка BC за точку C точку T такую, что $CN = CT$. Тогда $NT = 2NC$, и данное в условии равенство можно переписать так:

$$BN \cdot MA = BM \cdot NT \iff \frac{BN}{BM} = \frac{NT}{MA}.$$

Отсюда по теореме о пропорциональных отрезках следует, что $MN \parallel AT$. Значит, $\angle ATN = \angle MNB = 80^\circ$, но тогда в треугольнике ANT равны углы при вершинах N и T , то есть этот треугольник равнобедренный. Его медиана AC является также высотой. Значит, $\angle ACN = 90^\circ$, $\angle CAN = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$.



Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования — баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего. За грубые ошибки могут быть сняты дополнительные баллы.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

-
1. **(3 балла)** Выражение приведено к произведению факториала и квадрата натурального числа — 1 балл;

- рассмотрен случай делимости только одного из сомножителей на соответствующее простое число (19 или 17) — не более 2 баллов за задачу.
-

2. **(3 балла)** Сумма квадратов последовательных чисел после вычитания чисел 10 и 28 соответственно упрощена и приведена к виду kn^2 — 1 балл;

- полученный ответ меньше правильного — не более 1 балла за задачу.
-

3. **(4 балла)** Указано, что неравенство имеет вид $|A + B| \geq |A| + |B|$ — 1 балл;

- неравенство приведено к виду $AB \geq 0$ — 1 балл;
 - за каждый из случаев $A \geq 0, B \geq 0$ и $A \leq 0, B \leq 0$ — по 1 баллу.
 - неэквивалентное преобразование неравенства — не более 1 балла за задачу.
-

4. **(5 баллов)** Ответ отличается от верного более чем в 4 раза — 0 баллов за задачу.

- не учтен один случай из шести (с точностью до поворотов на $\pm 90^\circ$ и симметрий) расположения ромбов — не более 3 баллов за задачу;
 - не учтены хотя бы два случая из шести (с точностью до поворотов на $\pm 90^\circ$ и симметрий) расположения ромбов — не более 1 балла за задачу;
 - не учтено три или более случаев из шести (с точностью до поворотов на $\pm 90^\circ$ и симметрий) расположения ромбов — 0 баллов за задачу;
 - ошибка на 1 в сомножителях при разборе хотя бы одного случая — снять 2 балла.
-

5. **(5 баллов)** Уравнение преобразовано к виду $A \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$ — 1 балл;

- указано, что множители в правой части полученного уравнения — чётные числа, причём ровно одно из них кратно 4 — 1 балл;
 - верно составлены системы для нахождения решений — 1 балл;
 - верно решены полученные системы — 1 балл;
 - потеряно решение с отрицательным значением y — снять 1 балл.
-

6. **(5 баллов)** Найдена точка на окружности, в которой достигается минимум данной квадратичной функции — 2 балла;
- если при этом потерян модуль, 1 балл вместо 2;
 - получено уравнение относительно a — 1 балл;
 - если при этом потерян модуль, баллы не добавляются;
 - за каждое найденное значение a — по 1 баллу;
 - за каждое постороннее значение a — снять по 1 баллу.
-

7. **(6 баллов)** Сделано дополнительное построение и получены подобные треугольники BMN и BAT (как в решении) или аналогичные (например, проведена прямая CP через середину P отрезка AM и получены подобные треугольники BMN и BPC) — 3 балла.