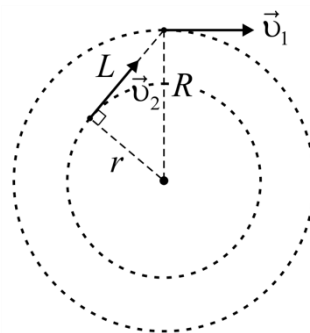


Олимпиада школьников «Ломоносов»
Заключительный этап 2025/26 учебного года по физике
7-9 классы (решения)

1. Задача. Заяц бежит по ровному полю с постоянной по модулю скоростью $v_1 = 25$ км/ч по окружности радиусом $R = 30$ м. Волк, находящийся в центре окружности, по которой бежит заяц, в момент времени $t = 0$ решает побегать за ним, всё время направляя свою скорость $\vec{v}_2$ точно на зайца. Чему будет равно расстояние L между волком и зайцем через время t при длительной погоне ($t \gg 2\pi R/v_1$)? Модуль скорости волка постоянен и равен $v_2 = 24$ км/ч?

1. Решение. Обратим внимание, что по условию задачи модуль скорости волка меньше модуля скорости зайца ($v_2 < v_1$). Траектория волка будет иметь вид спирали, однако с течением времени при $t \gg 2\pi R/v_1$ возникнет установившийся режим, при котором спиральная траектория волка будет вырождаться в окружность радиуса r . При этом центр окружности радиуса r совпадает с центром окружности радиуса R (см. рисунок). В этом установившемся режиме скорость волка $\vec{v}_2$ направлена по касательной к траектории волка, т.е. по касательной к окружности радиуса r .



Таким образом с течением времени расстояние между волком и зайцем стремится к величине L , которую и требуется найти. В установившемся режиме заяц и волк будут пробегать полный круг за одинаковое время:

$$\frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\pi r}{v_2} \quad \rightarrow \quad r = R \frac{v_2}{v_1}.$$

Из прямоугольного треугольника на рисунке получим:

$$R^2 = r^2 + L^2.$$

Подставив полученное ранее выражение для r , находим установившееся расстояние L между волком и зайцем:

$$R^2 = R^2 \frac{v_2^2}{v_1^2} + L^2 \quad \rightarrow \quad L = R \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}} = 8,4 \text{ м.}$$

Ответ:

$$L = R \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}} = 8,4 \text{ м.}$$

2. Задача. Мальчик налил в высокий цилиндр две несмешивающиеся жидкости: внизу – воду, сверху – подсолнечное масло. У него есть елочная игрушка, представляющая собой полый пластиковый шарик объемом $V = 100 \text{ см}^3$ и массой $m = 20 \text{ г}$ с небольшим отверстием. Какую массу песка нужно насыпать внутрь шарика и потом герметично закрыть, чтобы шарик опустился сквозь масло и оказался в равновесии на границе раздела жидкостей – наполовину погрузившись в воду, наполовину оставшись в масле? Ответ выразите в граммах, массой пробки, герметично закрывающей отверстие, пренебрегите. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, масла $\rho_{\text{м}} = 920 \text{ кг/м}^3$.

2. Решение. Тело находится в равновесии, следовательно, по условию равновесия векторная сумма всех сил равна нулю. Проекция на ось x , направленную вертикально вверх, всех действующих на шар сил запишутся в виде:

$$F_{A1} + F_{A2} - (m + M)g = 0, \quad (1)$$

где m – масса шара, M – масса песка, F_{A1} , F_{A2} – проекции сил Архимеда, действующих на части шара, погруженные в воду и масло, соответственно. По закону Архимеда они равны весу вытесненной жидкости:

$$F_{A1} = \rho_{\text{в}} V_{\text{в}} g, \quad (2)$$

$$F_{A2} = \rho_{\text{м}} V_{\text{м}} g, \quad (3)$$

где $V_{\text{в}}$, $V_{\text{м}}$ объёмы частей шара, находящихся в воде и масле соответственно:

$$V_{\text{в}} = V_{\text{м}} = \frac{1}{2} V \quad (4)$$

Рассмотрим уравнение (1) с учётом (2), (3), (4):

$$\rho_{\text{в}} \frac{1}{2} V + \rho_{\text{м}} \frac{1}{2} V - (m + M) = 0.$$

Решая его, получим:

$$M = \frac{\rho_{\text{в}} + \rho_{\text{м}}}{2} V - m = \frac{1000 + 920}{2} 100 \cdot 10^{-6} - 20 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 0,076 \text{ кг} = 76 \text{ г}.$$

Ответ:

$$M = \frac{\rho_{\text{в}} + \rho_{\text{м}}}{2} V - m = 76 \text{ г}.$$

3. Задача. Ребята решили напоить Деда Мороза горячим чаем во время новогоднего праздника в школе. Они налили в большой фарфоровый чайник массой $m_{\text{ф}} = 500\text{г}$ горячий чай массой $m_1 = 300\text{г}$, а температура содержимого стала равна $t_1 = 90^\circ\text{C}$. Но вот только горячий чай Деду Морозу пить совсем нельзя. Ребята решили охладить чай и влили в чайник $m_3 = 400\text{г}$ воды при температуре $t_3 = 5^\circ\text{C}$. Потрогав полученный чай, Дед Мороз сказал, что он для него все еще очень теплый и опасен для его здоровья. Тогда ребята кинули в чайник еще кусок льда массой $m_2 = 250\text{г}$ при температуре $t_2 = -10^\circ\text{C}$, при этом лед весь растаял, и только после этого Дед Мороз решился попробовать приготовленный ребятами чай. Найдите конечную температуру приготовленного ребятами чая для Деда Мороза. Потерями тепла в окружающую среду пренебречь. Удельные теплоемкости фарфора, льда и воды равны $c_{\text{ф}} = 500 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$ соответственно. Считать удельные теплоемкости чая и воды одинаковыми. Удельная теплота плавления льда равна $\lambda = 340\text{кДж}/\text{кг}$.

3. Решение.

Будем считать систему “вода-лёд-чайник-горячий чай” теплоизолированной.

Количество теплоты, отданное чайником и горячим чаем, равно:

$$Q_1 = c_{\text{в}}m_1(t_1 - t_{\text{к}}) + c_{\text{ф}}m_{\text{ф}}(t_1 - t_{\text{к}}).$$

Количество теплоты, полученное льдом и водой, равно:

$$Q_2 = c_{\text{л}}m_2(t_{\text{пл}} - t_2) + \lambda m_2 + c_{\text{в}}m_2(t_{\text{к}} - t_{\text{пл}}) + c_{\text{в}}m_3(t_{\text{к}} - t_3),$$

где $t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$ – температура плавления льда, $t_{\text{к}}$ – конечная температура чая.

Из уравнения теплового баланса $Q_1 = Q_2$ получим:

$$t_{\text{к}} = \frac{c_{\text{в}}m_1t_1 + c_{\text{ф}}m_{\text{ф}}t_1 + c_{\text{в}}m_3t_3 - c_{\text{л}}m_2(t_{\text{пл}} - t_2) - \lambda m_2 + c_{\text{в}}m_2t_{\text{пл}}}{c_{\text{в}}m_1 + c_{\text{ф}}m_{\text{ф}} + c_{\text{в}}m_3 + c_{\text{в}}m_2} =$$

$$\frac{4200 \cdot 0,3 \cdot 90 + 500 \cdot 0,5 \cdot 90 + 4200 \cdot 0,4 \cdot 5}{4200 \cdot 0,3 + 500 \cdot 0,5 + 4200 \cdot 0,4 + 4200 \cdot 0,25} +$$

$$+ \frac{-2100 \cdot 0,25 \cdot 10 - 340000 \cdot 0,25 + 4200 \cdot 0,25 \cdot 0}{4200 \cdot 0,3 + 500 \cdot 0,5 + 4200 \cdot 0,4 + 4200 \cdot 0,25} \approx 12,7^\circ\text{C}$$

Ответ: $t_{\text{к}} \approx 12,7^\circ\text{C}$

4. Задача. Холодная вода из водопровода, имеющая температуру $t_1 = 8,6^\circ\text{C}$, нагревается с помощью проточного электрического водонагревателя, подключенного к сети с постоянным напряжением $U = 200\text{ В}$. Нагревательный элемент состоит из $N = 2$ одинаковых нихромовых спиралей, соединенных между собой параллельно. При объемном расходе воды $\alpha = 4\text{ л/мин}$ в установившемся режиме достигается ее нагрев до температуры $t_2 = 40^\circ\text{C}$. Какая суммарная длина L нихромовой проволоки диаметра $d = 0,6\text{ мм}$ потребовалась для изготовления всех N спиралей данного водонагревателя? Удельное сопротивление нихрома при рабочей температуре водонагревателя $\rho = 1,1\text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$, удельная теплоемкость воды $c = 4200\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$, плотность воды $\rho_0 = 1000\text{ кг/м}^3$. Считать, что в установившемся режиме все количество теплоты, выделяемое спиральями водонагревателя, идет на нагрев воды. Ответ дать в метрах и округлить до целого числа.

4. Решение. Рассмотрим промежуток времени τ , за который через водонагреватель проходит вода массы Δm . В соответствии с условием задачи будем считать, что все количество теплоты, выделяемое спиральями водонагревателя, идет на нагрев воды. Для нагрева воды массы Δm на $\Delta t = (t_2 - t_1)$ необходимо количество теплоты Q , равное

$$Q = c \cdot \Delta m \cdot \Delta t = c \cdot \Delta m (t_2 - t_1).$$

Объем ΔV и масса Δm воды, прошедшей через водонагреватель за время τ , связаны между собой соотношением: $\Delta m = \rho_0 \cdot \Delta V$. Тогда объемный расход воды α можно представить в виде:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{\tau} = \frac{\Delta m}{\rho_0 \tau} \rightarrow \Delta m = \rho_0 \alpha \tau.$$

В таком случае мощность водонагревателя P равна

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{c \rho_0 \alpha \tau (t_2 - t_1)}{\tau} = c \rho_0 \alpha (t_2 - t_1).$$

Мощность P , выделяющуюся на нихромовых спиральях нагревательного элемента, можно посчитать следующим образом:

$$P = \frac{U^2}{R},$$

где R – общее сопротивление N спиралей, соединенных параллельно. Длина проволоки, приходящейся на одну спираль, равна L/N . Тогда сопротивление одной такой спирали R_0 равно:

$$R_0 = \rho \frac{L/N}{\pi(d/2)^2} = \frac{4\rho L}{\pi N d^2}.$$

Таким образом общее сопротивление R нагревательного элемента

$$R = \frac{R_0}{N} = \frac{4\rho L}{\pi N^2 d^2}.$$

Мощность водонагревателя в таком случае имеет вид:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\pi U^2 N^2 d^2}{4\rho L}.$$

Приравнивая полученные выражения для мощности P , получаем:

$$\frac{\pi U^2 N^2 d^2}{4\rho L} = c \rho_0 \alpha (t_2 - t_1).$$

Окончательно для суммарной длины L нихромовой проволоки, потребовавшейся для изготовления всех N спиралей водонагревателя, имеем:

$$L = \frac{\pi U^2 N^2 d^2}{4c\rho\rho_0\alpha(t_2 - t_1)} \approx 5 \text{ м.}$$

В единицах СИ объемный расход воды равен $\alpha = 4 \text{ л/мин} = 4 \cdot 10^{-3}/60 \text{ м}^3/\text{с}$.

Ответ:

$$L = \frac{\pi U^2 N^2 d^2}{4c\rho\rho_0\alpha(t_2 - t_1)} \approx 5 \text{ м.}$$

5. Задача. Колесо скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости, образующей угол $\alpha=30^\circ$ с горизонтом. В тот момент, когда скорость центра колеса стала равна $V=10$ м/с, от его обода отрывается капля воды. Определите максимально возможную высоту $H_{\max}$, относительно точки отрыва, на которую может подняться капля. Считать, что капля может с равной вероятностью оторваться от любой точки обода. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

5. Решение.

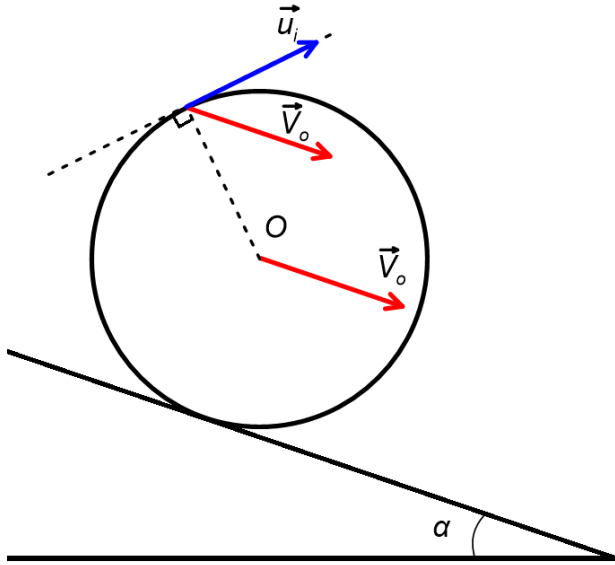


Рис.1.

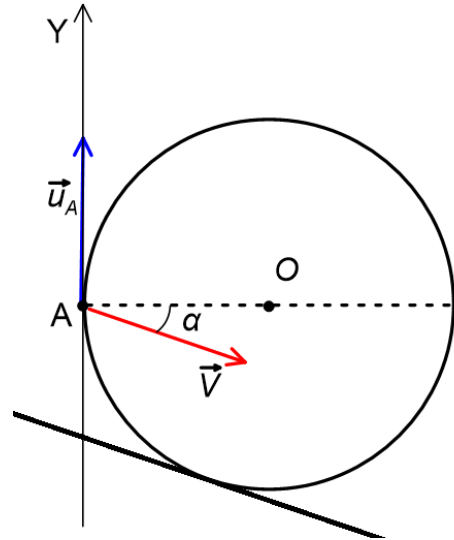


Рис.2.

В момент отрыва скорость капли $\vec{v}$ равна скорости i -ой точки обода колеса, от которой произошел отрыв. Поэтому скорость капли можно представить как векторную сумму скорости $\vec{V}$ оси колеса в системе отсчёта, связанной с Землей, и относительной скорости точки обода $\vec{u}_i$ в системе отсчета, связанной с осью колеса:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}_i. \quad (1)$$

Поскольку колесо движется без проскальзывания, то $|\vec{u}_i| = |\vec{V}|$ для произвольной точки i . При этом скорость $\vec{u}_i$ для каждой точки обода колеса направлена по касательной к ободу (см. рис.1).

Максимально возможная высота подъема капли, будет достигаться при максимально возможной ее вертикальной скорости: $v_y = (v_y)_{\max}$. Скорость оси колеса $\vec{V}$, входящая в формулу (1), одинакова для каждой точки обода. Поэтому v_y достигает своего максимального значения при $(u_i)_y = (u_y)_{\max}$. Это выполняется для точки А обода колеса, лежащей на горизонтальном его диаметре (см. рис.2). В данной точке скорость $\vec{u}_A$ сонаправлена с осью Y . Таким образом:

$$(v_y)_{\max} = -V \sin(\alpha) + (u_y)_{\max} = -V \sin(\alpha) + V = V(1 - \sin(\alpha)).$$

Тогда максимально возможная высота подъема капли:

$$H_{\max} = \frac{(v_y)_{\max}^2}{2g} = \frac{V^2(1 - \sin(\alpha))^2}{2g} = \frac{10^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot 10} = 1,25 \text{ м.}$$

$$\text{Ответ: } H_{\max} = \frac{V^2(1 - \sin(\alpha))^2}{2g} = 1,25 \text{ м;}$$

Критерии оценки

Каждая задача оценивается максимально в 20 баллов.

1. Задача вовсе не решалась – **0 баллов**.
2. Задача не решена, но сделан поясняющий рисунок (если требуется), частично сформулированы необходимые физические законы;
или задача решается в числах с самого начала и имеется правильный ответ в числах:
1 – 5 баллов.
3. Задача не решена, но правильно сформулированы физические законы и правильно записаны основные уравнения, необходимые для решения задачи – **6 – 12 баллов**.
4. Задача решена, но допущены незначительные погрешности – **13-18 баллов**.
5. Нет численного ответа **19 баллов**.
6. Задача решена полностью и получен правильный ответ – **20 баллов**.