

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

Ответ: $2^{26}7^{37}$.

Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 2 и 7. Пусть $a = 2^{\alpha_1}7^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2}7^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3}7^{\beta_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2 и 7.

1) Из того, что ab делится на 2^{14} , следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 14$. Аналогично, $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$ и $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 20$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{14+17+20}{2} = 25,5$. Значит, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 26$. Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 26$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_3 = 12$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 14$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 20$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 18$).

2) Из того, что ac делится на 7^{37} следует, что $\beta_1 + \beta_3 \geq 37$. Заметим, что $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \beta_1 + \beta_3 \geq 37$. $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ может равняться 37, если, например, $\beta_1 = 18$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 19$.

Так как минимум каждой из сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ не зависит от другого, то и минимальное значение abc равно

$$2^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}7^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} = 2^{26}7^{37}.$$

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$. При каком наибольшем m могло оказаться, что дробь сократима на m ?

Ответ: 8.

Решение. Пусть $d = \text{НОД}(a^2 - 6ab + b^2; a + b)$. Так как $a^2 - 6ab + b^2 = a(a + b) - 7ab + b^2 = a(a + b) - 7b(a + b) + 8b^2$, т.е. $8b^2 = (a^2 - 6ab + b^2) + (7b - a)(a + b)$, из этого равенства следует, что $8b^2$ делится нацело на d . Аналогично доказывается что $8a^2$ делится нацело на d . Поэтому $d \leq \text{НОД}(8b^2; 8a^2) = 8 \cdot \text{НОД}(a^2; b^2) \leq 8$, так как числа a и b взаимно просты и $\text{НОД}(a; b) = 1$. Докажем, что значение $d = 8$ может достигаться. Для этого достаточно взять $a = 1$, $b = 7$ – при этом дробь равна $\frac{8}{8} = 1$.

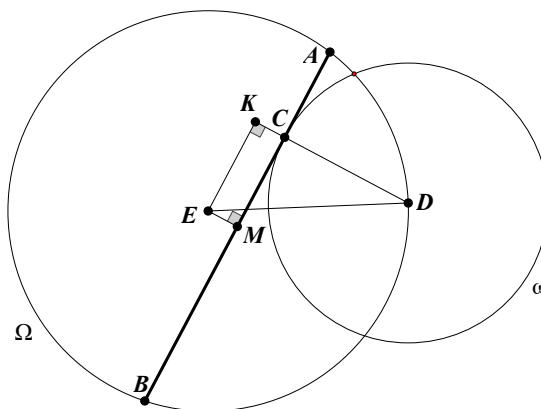
3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

Ответ: $AB = 8$.

Решение. Пусть точки D и E – центры ω и Ω соответственно, а точки K и M – проекции точки E на прямые CD и AB соответственно. Так как ω касается прямой AB в точке C , то $\angle KCM = 90^\circ$; тогда в четырёхугольнике $CMEK$ три угла прямые, и он прямоугольник. Обозначим $AB = 8x$, $ME = y$. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, поэтому M – середина AB ; тогда $BM = \frac{1}{2}AB = 4x$, $EK = CM = BM - BC = BM - \frac{1}{8}AB = 4x - x = 3x$ и $DK = DC + CK = DC + EM = 1 + y$. Запишем теорему Пифагора для треугольников BEM и DEK и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} (4x)^2 + y^2 = 5^2, \\ (1+y)^2 + (3x)^2 = 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{25}{16} - \frac{y^2}{16}, \\ 1 + 2y + y^2 + \frac{225}{16} - \frac{9y^2}{16} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{25}{16} - \frac{y^2}{16}, \\ 7y^2 + 32y - 159 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение имеет одно положительное решение $y = 3$; отсюда $x = 1$ и $AB = 8x = 8$.



4. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$.

Ответ. $x = \frac{2}{7}$.

Решение. Заметим, что правая часть уравнения есть разность подкоренных выражений в левой части уравнения. Обозначим $u = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$, $v = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$. Тогда $2 - 7x = u^2 - v^2$, и уравнение принимает вид

$$u - v = u^2 - v^2 \Leftrightarrow (u - v)(1 - u - v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v, \\ u + v = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет единственное решение $x = \frac{2}{7}$ (принадлежащее области допустимых значений). Покажем, что левая часть второго уравнения $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$ больше правой при всех допустимых значениях x (что означает, что у уравнения нет решений). Если $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 1$, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1$. Это выполняется при $0 \leq 2x^2 + 2x + 1 \leq 1$, т.е. при $x \in [-1; 0]$. При таких значениях аргумента $2x^2 - 5x \geq 0$, поэтому $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq \sqrt{3}$ и $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 1$. Итак, уравнение имеет единственное решение $x = \frac{2}{7}$.

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

Ответ: 2 986.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в виде $2x_2 + y_2 - 12 = 2x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k . Пара точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 12$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k .

Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -2x$ и $y = -2x + 30$, поэтому они параллельны прямым $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 12$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0 \leq k \leq 30$ и $0 \leq k + 12 \leq 30$, поэтому $k \in [0; 18]$.

Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y = -2x + b$. Если b чётное (т.е. $b = 2l$), то получаем прямую $y = 2(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y , а чтобы точка оказалась внутри параллелограмма нужно, чтобы $0 \leq y \leq 24 \Leftrightarrow l - 12 \leq x \leq l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 13 целых значений x . Если b нечётное, то есть $b = 2l + 1$, имеем $0 \leq -2x + 2l + 1 \leq 24 \Leftrightarrow l - \frac{23}{2} \leq x \leq l + \frac{1}{2}$. Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем $l - 11 \leq x \leq l$ — всего 12 целочисленных значений.

Если $k = 2l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 12$ можно выбрать по 13 точек – всего $10 \cdot 13 \cdot 13 = 1690$ способов. Если $k = 2l + 1$ (таких значений 9), то на каждой из двух прямых $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 12$ можно выбрать по 12 точек – имеем $9 \cdot 12 \cdot 12 = 1296$ способов. Итого получаем $1690 + 1296 = 2986$ способов.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдется значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x + 8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

Ответ: $a \in \left\{ \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}; \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$.

Решение. Рассмотрим неравенство системы. Его левая часть обращается в ноль на окружностях $(x + 8)^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$. Внутри каждой из окружностей один из множителей в левой части положителен, а второй – отрицателен. В области вне окружностей оба множителя положительны. Таким образом, неравенство определяет совокупность двух кругов Ω и ω с центрами в точках $O(0; 0)$ и $Q(-8; 0)$ с радиусами 2 и 1 соответственно. Первое уравнение системы определяет прямую $y = ax + 10b$ с угловым коэффициентом $k = a$. При фиксированном значении a – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = a$.

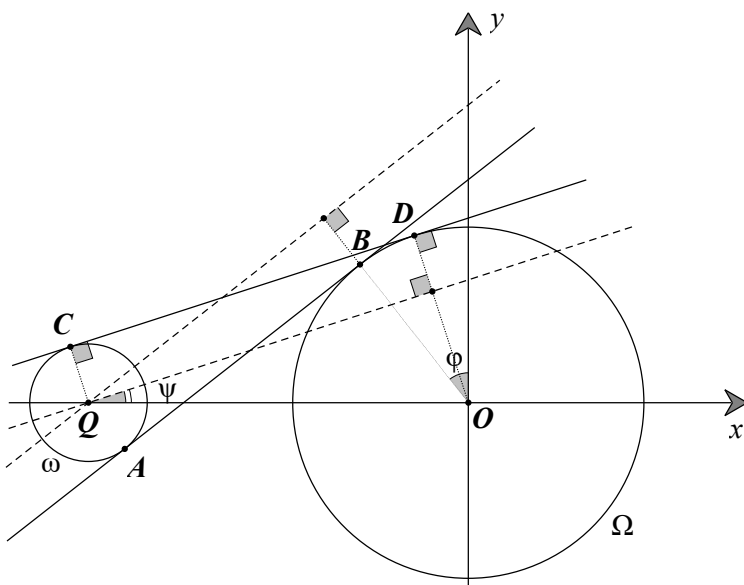
Чтобы система имела ровно 2 решения, прямая должна касаться обеих кругов. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю равен угловому коэффициенту общей касательной к окружностям (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она касалась обеих окружностей).

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям, имеющую положительный наклон (пусть A и B – точки касания этой прямой с ω и Ω соответственно). Пусть ℓ – прямая, параллельная AB и проходящая через точку Q ; пусть также $\ell \cap OB = H$, $\angle HQO = \varphi$ ($QH \parallel AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 8$, $HO = HB + BO = QA + BO = 1 + 2 = 3$, то из прямоугольного треугольника HQO имеем $QH = \sqrt{OQ^2 - HO^2} = \sqrt{55}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{HO}{QH} = \frac{3}{\sqrt{55}}$.

Аналогично рассматриваем случай общей внешней касательной. Пусть CD – общая внешняя касательная с положительным наклоном (C и D – её точки касания с ω и Ω соответственно). Опускаем из точки Q перпендикуляр QT на радиус DO большей окружности. Тогда $\psi = \angle OQT$ и есть угол наклона общей внешней касательной. Имеем $OT = OD - QC = 1$, $QT = \sqrt{OQ^2 - OT^2} = \sqrt{63}$, $\operatorname{tg} \psi = \frac{OT}{QT} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$.

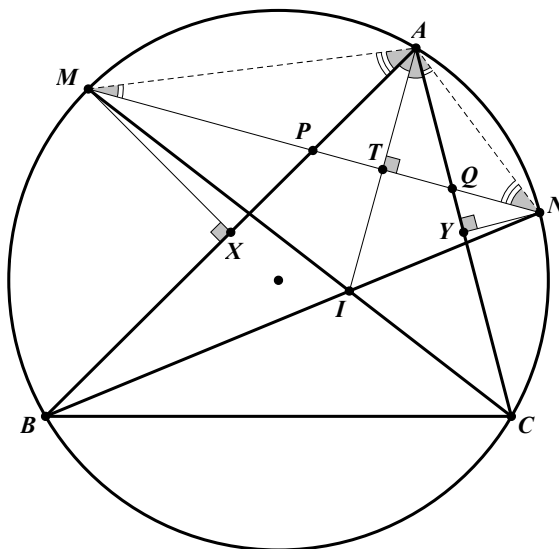
Так как подходят и положительные, и отрицательные значения наклона, окончательно получаем $a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$ или $a = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}$.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности,



которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

Ответ: 6.



Решение. Пусть отрезок MN пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно; I – центр вписанной окружности треугольника; X и Y – проекции точек M и N на стороны AB и AC соответственно. Обозначим также точку пересечения прямых AI и MN через T . Углы AMN и CAN равны как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги; аналогично $\angle BAM = \angle ANM$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle APQ = \angle PAM + \angle PMA$, а $\angle AQP = \angle QAN + \angle QNA$, поэтому $\angle APQ = \angle AQP$. Значит, треугольник APQ равнобедренный, AI – его биссектриса, следовательно, $AI \perp PQ$. Далее рассмотрим три пары подобных треугольников и запишем пропорциональность сторон в них:

$$\triangle AQN \sim \triangle MPA \Rightarrow \frac{AQ}{MP} = \frac{QN}{AP};$$

$$\triangle QAT \sim \triangle QNY \Rightarrow \frac{AT}{YN} = \frac{AQ}{QN};$$

$$\triangle ATP \sim \triangle MXP \Rightarrow \frac{MX}{AT} = \frac{MP}{AP}.$$

Разделив второе равенство на третье, получаем $\frac{AT^2}{MX \cdot YN} = \frac{AP \cdot AQ}{MP \cdot NQ}$. Но из первого равенства следует, что $AP \cdot AQ = MP \cdot QN$, откуда $AT^2 = MX \cdot YN = 9$. Остаётся отметить, что $\angle MNB = \angle MNA$ (так как эти углы опираются на равные дуги), поэтому NM – биссектриса угла ANB . Значит, в $\triangle ANI$ отрезок NT – биссектриса и высота, треугольник равнобедренный, а NT также является его медианой и $AT = TI$. Итак, $AI = 2AT = 2\sqrt{9} = 6$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(4 балла)** По 1 баллу за оценку и за пример для каждого простого множителя.

Неверное утверждение о делимости в решении, например, $x|a \ \& \ y|b \Rightarrow \frac{x}{y} \Big| \frac{a}{b}$ – 0 баллов за задачу.

2. **(4 балла)** Знаменатель дроби преобразован к виду $(a + b)^2 - \gamma ab$ и других продвижений нет – 1 балл за задачу;

получена оценка $m \leq d$ на наибольшее значение числа m (где d является ответом в задаче) – 3 балла;

доказано, что это значение m может достигаться – 1 балл.

3. **(4 балла)** Составлена система уравнений (как в условии или аналогичная ей) – 2 балла; решена полученная система и найдено значение AB – 2 балла.
-

4. **(5 баллов)** При любом способе решения: получен хотя бы один лишний корень – не более 2 баллов за задачу.

- Если задача решается, как в приведённых решениях:
 - левая часть уравнения разложена на множители – 1 балл;
 - получена совокупность двух уравнений – 1 балл;
 - решено уравнение с равенством двух радикалов – 1 балл;
 - решено уравнение, в котором сумма двух радикалов равна единице – 2 балла.
- При другом способе решения: после умножения обеих частей на сопряжённое к левой части найден корень уравнения – 1 балл;
 - обосновано, что других корней нет – 4 балла.

5. (5 баллов) Ответ не доведён до числа – не более 4 баллов за задачу;
при подсчёте не учтены точки, лежащие на границе параллелограмма – снять 1 балл.
Ответ отличается от верного более чем в 10 раз – 0 баллов за задачу.

- Если решается рассмотрением различных значений разности $y_2 - y_1$:
 - задача сведена к рассмотрению различных значений разности $y_2 - y_1$ – 1 балл;
если при этом не учитываются отрицательные значения разности – баллы не добавляются;
 - верный подсчёт хотя бы в одном случае – 1 балл.
- Если решается как в приведённых решениях:
 - показано, что условие на координаты точек выполняется тогда и только тогда, когда точки лежат на прямых вида
$$\begin{array}{llll} y = -2x + k & \text{и} & y = -2x + k + 12 & \text{для варианта 9,} \\ y = -2x + k & \text{и} & y = -2x + k + 14 & \text{для варианта 10} \end{array}$$
– 1 балл;
 - определены возможные значения числа k – 1 балл;
 - для каждой прямой из указанного семейства определено количество точек на ней, имеющих целочисленные координаты и лежащих внутри параллелограмма – 1 балл;
найден количество точек лишь на некоторых прямых (т.е. не на всех) – не более 2 баллов за задачу.

-
6. (5 баллов) Построено множество точек, удовлетворяющих неравенству системы – 1 балл;
сформулировано условие, при котором прямая может иметь 2 общие точки с двумя кругами (её угловой коэффициент по модулю равен угловому коэффициенту одной из общих касательных к кругам) – 1 балл;
найден угловой коэффициент общей внешней касательной окружностей – 1 балл;
найден угловой коэффициент общей внутренней касательной окружностей – 1 балл.
-

7. (6 баллов) Доказано, что $AT \perp PQ$ (или что треугольник APQ равнобедренный) – 1 балл;
вычислена длина отрезка AT (здесь $T = AI \cap MN$) – 4 балла;
использовано без доказательства, что $MI = MA$ и/или $NI = NA$ (лемма о трезубце /трилистнике/ куриной лапке/Мансиона) – баллы не снимаются.