9 класс

Второй день

9.5. В детском саду воспитательница взяла $n > 1$ одинаковых картонных прямоугольников и раздала их n детям, каждому по прямоугольнику. Каждый ребёнок разрезал свой прямоугольник на несколько одинаковых квадратиков (квадратики у разных детей могли быть разными). Оказалось, что общее количество квадратиков — простое число. Докажите, что исходные прямоугольники были квадратами.

9.6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.

9.7. Среди 16 монет есть 8 *тяжёлых* — весом по 11 г, и 8 *лёгких* — весом по 10 г, но неизвестно, какие из монет какого веса. Одна из монет — юбилейная. Как за три взвешивания на двухчашечных весах без гирь узнать, является юбилейная монета тяжёлой или лёгкой?

9.8. Даны числа a, b, c, не меньшие 1. Докажите, что

$$\frac{a+b+c}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. В детском саду воспитательница взяла $n > 1$ одинаковых картонных прямоугольников и раздала их n детям, каждому по прямоугольнику. Каждый ребёнок разрезал свой прямоугольник на несколько одинаковых квадратиков (квадратики у разных детей могли быть разными). Оказалось, что общее количество квадратиков — простое число. Докажите, что исходные прямоугольники были квадратами.

9.6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.

9.7. Среди 16 монет есть 8 *тяжёлых* — весом по 11 г, и 8 *лёгких* — весом по 10 г, но неизвестно, какие из монет какого веса. Одна из монет — юбилейная. Как за три взвешивания на двухчашечных весах без гирь узнать, является юбилейная монета тяжёлой или лёгкой?

9.8. Даны числа a, b, c, не меньшие 1. Докажите, что

$$\frac{a+b+c}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

10 класс

Второй день

10.5. В детском саду воспитательница взяла $n > 1$ одинаковых картонных прямоугольников и раздала их n детям, каждому по прямоугольнику. Каждый ребёнок разрезал свой прямоугольник на несколько одинаковых квадратиков (квадратики у разных детей могли быть разными). Оказалось, что общее количество квадратиков — простое число. Докажите, что исходные прямоугольники были квадратами.

10.6. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Точки D и E — соответственно середины меньших дуг AB и BC окружности ω, описанной около треугольника ABC. На продолжении отрезка BD за точку D отмечена точка P, а на продолжении отрезка BE за точку E — точка Q так, что $\angle APB = \angle CQB = 90^\circ$. Докажите, что середина отрезка BL лежит на прямой PQ.

10.7. В математическом кружке занимаются 24 школьника. Каждую команду, состоящую из 6 школьников, руководитель считает либо *сыгранной*, либо *несыгранной*. Для турнира математических боёв руководитель собирается разбить детей на 4 команды по 6 человек. Может ли оказаться, что при любом разбиении школьников на 4 команды сыгранными оказываются либо ровно три команды, либо ровно одна, причём и тот, и другой варианты присутствуют?

10.8. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный.

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. В детском саду воспитательница взяла $n > 1$ одинаковых картонных прямоугольников и раздала их n детям, каждому по прямоугольнику. Каждый ребёнок разрезал свой прямоугольник на несколько одинаковых квадратиков (квадратики у разных детей могли быть разными). Оказалось, что общее количество квадратиков — простое число. Докажите, что исходные прямоугольники были квадратами.

10.6. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Точки D и E — соответственно середины меньших дуг AB и BC окружности ω, описанной около треугольника ABC. На продолжении отрезка BD за точку D отмечена точка P, а на продолжении отрезка BE за точку E — точка Q так, что $\angle APB = \angle CQB = 90^\circ$. Докажите, что середина отрезка BL лежит на прямой PQ.

10.7. В математическом кружке занимаются 24 школьника. Каждую команду, состоящую из 6 школьников, руководитель считает либо *сыгранной*, либо *несыгранной*. Для турнира математических боёв руководитель собирается разбить детей на 4 команды по 6 человек. Может ли оказаться, что при любом разбиении школьников на 4 команды сыгранными оказываются либо ровно три команды, либо ровно одна, причём и тот, и другой варианты присутствуют?

10.8. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный.

11 класс

Второй день

11.5. Радиусы пяти концентрических окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем q. При каком наибольшем q можно нарисовать незамкнутую ломаную $A_0A_1A_2A_3A_4$, состоящую из четырёх отрезков равной длины, в которой A_i лежит на ω_i при всех $i = 0, 1, 2, 3, 4$?

11.6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.

11.7. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный.

11.8. Дано натуральное n. Из 26 единичных белых кубиков и одного чёрного кубика собирается куб $3 \times 3 \times 3$ так, что чёрный кубик находится в его центре. Из n^3 таких кубов с ребром 3 составили куб с ребром $3n$. Какое наименьшее количество белых кубиков можно перекрасить в красный цвет так, чтобы каждый белый кубик имел хотя бы одну общую вершину с каким-нибудь красным?

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Радиусы пяти концентрических окружностей $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем q. При каком наибольшем q можно нарисовать незамкнутую ломаную $A_0A_1A_2A_3A_4$, состоящую из четырёх отрезков равной длины, в которой A_i лежит на ω_i при всех $i = 0, 1, 2, 3, 4$?

11.6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.

11.7. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный.

11.8. Дано натуральное n. Из 26 единичных белых кубиков и одного чёрного кубика собирается куб $3 \times 3 \times 3$ так, что чёрный кубик находится в его центре. Из n^3 таких кубов с ребром 3 составили куб с ребром $3n$. Какое наименьшее количество белых кубиков можно перекрасить в красный цвет так, чтобы каждый белый кубик имел хотя бы одну общую вершину с каким-нибудь красным?